Cooperación y renegociación en juegos no cooperativos*

José Luis Ferreira y
Diego Moreno
Universidad Carlos III de Madrid

Resumen

Muchas de las situaciones «reales» que se analizan utilizando la teoría de los juegos no cooperativos se caracterizan porque los jugadores pueden comunicarse entre sí. La posibilidad de comunicación introduce oportunidades de cooperación entre los jugadores que han de ser tenidas en cuenta, pues pueden alterar el resultado de una manera fundamental. En este ensayo se presenta y discuten nociones de equilibrio alternativas para este tipo de situaciones.

Palabras clave: *equilibrio a prueba de renegociación, equilibrio a prueba de coaliciones, equilibrio correlado, comunicación.*

Abstract

Many of the «real world» situations analyzed using the theory of noncooperative games are characterized by the fact that players can communicate with one another. The possibility of communication introduces opportunities for cooperation among players that must be taken into account as they can alter the outcome in a fundamental way. In this essay different equilibrium concepts for this kind of situations are presented and discussed.

Key words: *renegociation-proof equilibrium, coalition-proof equilibrium, correlated equilibrium, communication.*

1. Introducción

Muchas de las situaciones reales que se analizan utilizando la teoría de los juegos no cooperativos se caracterizan porque los jugadores pueden comunicarse entre sí. La posibilidad de comunicación introduce oportunidades de cooperación entre los jugadores que han de ser tenidas en cuenta, pues pueden alterar el resultado de una manera fundamental. En este ensayo se presentan y discuten nociones de equilibrio alternativas para este tipo de situaciones.

En la literatura se han sugerido dos estrategias distintas para el análisis de estas situaciones. El enfoque más formal de la teoría de los juegos requeriría modelar explícitamente el proceso por el que los jugadores se comunican (lo que constituiría una etapa previa al juego original), y analizar el juego ampliado por esta etapa previa de comunicación. Esta modelización, sin embargo, ignora cualquier clase de consideraciones estratégicas que conciernen a la formación de coaliciones y a la conducta cooperativa que propicia la oportunidad de comunicación. Además, los procesos de comunicación que se observan en situaciones reales son demasiado complejos para que esta posibilidad sea practicable.

* El primer autor agradece la ayuda del proyecto de investigación de la DGICYT No. PB92-0245. El segundo autor agradece la ayuda del proyecto de investigación DGICYT No. PB93-0230. Ambos agradecen la ayuda de la Cátedra Gumersindo de Azcárate.

Una alternativa a este enfoque consiste en incorporar la posibilidad de comportamientos cooperativos como resultado de la comunicación entre los jugadores a la hora de diseñar conceptos de solución apropiados para estas situaciones. En esta línea de investigación, la etapa de comunicación previa al juego mismo no se modela y, en cambio, se ofrecen argumentos intuitivos para justificar las propiedades que se espera cumplan los conceptos de solución cuando los jugadores tienen libertad de comunicación.

Una premisa fundamental de este enfoque es que los jugadores intentarán coordinar sus acciones para producir resultados que les sean mutuamente beneficiosos: el objetivo de la comunicación entre los jugadores es, por tanto, el de alcanzar un «compromiso» que permita realizar las posibles ganancias derivadas de la cooperación entre los jugadores. Se supone, sin embargo, que el juego conserva el carácter de «no cooperativo», de manera que los compromisos que los jugadores puedan alcanzar no tienen fuerza «contractual». Así pues, un «compromiso de equilibrio» debe ser invulnerable frente a desviaciones tanto de individuos como de coaliciones de jugadores. Por ejemplo, en el juego de la Figura 1.1, el equilibrio de Nash (T, L) domina a los demás equilibrios de Nash. Si los jugadores tienen la oportunidad de comunicarse antes de decidir sus acciones, es de esperar que sean capaces de coordinarse en este equilibrio.

FIGURA 1.1

	L	R
T	2,2	0,0
B	0,0	1,1

Una de las primeras complicaciones que se encuentran en este enfoque es la de definir criterios de consistencia para los acuerdos entre los jugadores. En el caso sencillo del dilema del prisionero de la Figura 1.2, es evidente que, a pesar de que la estrategia (C, C) ofrezca resultados más atractivos para ambos jugadores que la estrategia (D, D), es este último el único equilibrio posible, puesto que la renegociación desde (D, D) hacia (C, C) no se sostiene, al tener los individuos incentivos a violar este acuerdo (por ejemplo, (D, C) es preferible a (C, C) para el jugador fila).

FIGURA 1.2

	C	D
C	4,4	0,5
D	5,0	1,1

Cómo extender estas ideas a juegos más complejos es lo que motiva los conceptos de equilibrio examinados en este trabajo.

La mayoría de las aplicaciones de la teoría de los juegos a situaciones económicas en las que los agentes pueden comunicarse libremente entre sí, pero no pueden firmar contratos, usan los resultados de este enfoque no clásico. Estas aplicaciones incluyen el estudio del comportamiento oligopolístico, contratos de agente y principal, la teoría de los sistemas electorales, regateo e implementación.

La organización de este ensayo es la siguiente: la Sección 2 se dedica a repasar algunos conceptos básicos; en la Sección 3 se estudian distintas nociones de equilibrio a prueba de renegociación para juegos repetidos, y se discute el problema de consistencia temporal implícito (en esta sección se ignora la posibilidad de desviaciones coalicionales). La Sección 4 se dedica a estudiar distintas nociones de equilibrio a prueba de coaliciones en un contexto estático. En la Sección 6 se presentan nociones de equilibrio que incorporan simultáneamente los aspectos de consistencia temporal (i.e., renegociación) y desviaciones coalicionales. Finalmente, en la Sección 6 se ofrecen algunas conclusiones.

2. Definiciones preliminares

En esta sección se discuten las nociones de juego en forma normal y juego repetido, y se introducen nociones de equilibrio bien conocidas y que a menudo resultan apropiadas. Asimismo se introduce notación y algunas definiciones que serán de utilidad en el desarrollo del presente ensayo.

Un juego en forma normal, G, es una terna (N, A, u), donde $N = \{1, ..., n\}$ es el *conjunto de jugadores*, $A = \Pi_{i=1}^{n} A_i$ es el *conjunto de perfiles de acciones* (A_i es el *conjunto de acciones o estrategias puras* del jugador i), y $u = (u_i, ..., u_n)$ es la *función de pagos* (para cada $i \in N$, $u_i: A \rightarrow \Re$ es una función de utilidad von Neumann-Morgenstern). En este ensayo supondremos que el conjunto A es finito.

Dado un conjunto arbitrario B, denotamos por ΔB al conjunto de distribuciones de probabilidad sobre B; asimismo, $|B|$ denota la cardinalidad de B ($|B|$ es el número de elementos de B, si B es finito, y es infinito en otro caso). Nos referimos a los elementos σ_i del conjunto ΔA_i como *estrategias mixtas* del jugador i; asimismo, $\sigma \in \Pi_{i \in N}(\Delta A_i)$ denota un perfil de estrategias mixtas. Dado $\sigma \in \Pi_{i \in N}(\Delta A_i)$, la utilidad esperada del jugador i puede calcularse como

$$U_i(\sigma) = \sum_{a \in A} \sigma_1(a_1) \dots \sigma_n(a_n)\, u_i(a).$$

El concepto de equilibrio comúnmente utilizado en juegos no cooperativos es el de *equilibrio de Nash.* Un perfil $\sigma \in \Pi_{i \in N}(\Delta A_i)$ es un equilibrio de Nash si ningún jugador $i \in N$ tiene una estrategia mixta $\sigma'_i \in \Delta A_i$ tal que $U_i(\sigma_i, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) > U_i(\sigma)$. Así pues, en un equilibrio de Nash ningún jugador tiene incentivos a desviarse. El concepto de equilibrio de Nash resulta apropiado para juegos no cooperativos en los que los jugadores no tienen la oportunidad de comunicarse antes de decidir sus estrategias, pero, como veremos, no es apropiado cuando los jugadores pueden comunicarse .

En un juego repetido, los jugadores se enfrentan a un juego en forma normal durante un número de ocasiones. Dado un juego en forma normal G, denotamos por G^T el juego repetido en el que los jugadores se enfrentan a G durante T períodos (T es el *horizonte* del juego, y puede ser un número finito o infinito). En los juegos repetidos que se consideran suponemos que los jugadores observan al final de cada período (i.e., tras cada repetición) las acciones realizadas hasta ese momento.

Sea $a^t = (a^t_i, ..., a^t_n)$ el perfil acciones tomadas por los jugadores en el período t. Una *historia* es un vector de perfiles de estrategias que especifica un perfil de estrategias para cada período $t = 0, 1, ..., T$, $h = (a^0, a^1, a^2, ..., a^T)$, donde $a^0 = \bar{a} \in$ A.[1] Dada una historia h y un período t, denotamos por h^t al vector de las acciones elegidas en todos los períodos anteriores a t, $(a^0, a^1, ..., a^{t-1})$. Sea $H^t = (A)^t$ el conjunto de todas las posibles historias de t períodos (cada $h^t \in H^t$ es una posible historia en el período t). Denotamos por $H = \bigcup_{t \leq 0} H^t$ al conjunto de historias posibles en el juego repetido al comienzo de cualquier período. Una estrategia pura para un jugador i en el juego G^T es una función f_i: $H \rightarrow A_i$. Sea F_i el conjunto de estrategias puras del jugador i, y sea $F = \Pi_{i \in N} F_i$ el conjunto de perfiles de estrategias puras. Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras, $\sigma_i \in \Delta F_i$. Para cada historia $h \in H$, denotamos por g^h al subjuego continuación de la historia h. Dado un perfil de estrategias σ, σ^h representa la proyección de σ en el subjuego g^h.

Puesto que todos los jugadores observan h^t, una estrategia pura f_i del jugador i en el juego repetido es una secuencia de funciones (una para cada período t) del conjunto de historias H^t en el conjunto de acciones A_i. Suponiendo que los jugadores recuerdan las acciones jugadas en todos los períodos (i.e., que el juego es de *memoria perfecta*), una estrategia mixta $\sigma_i \in \Delta F_i$ del jugador i en el juego repetido G^T puede representarse como una secuencia de funciones σ^t_i de H^t en ΔA_i. Así pues, dados $(\sigma \in \Pi_{i \in N} \Delta F_i, h \in H)$, denotamos por $\sigma(h^t)$ el perfil de estrategias mixtas inducido por σ en el período t del juego repetido.

No es obvio cómo calcular la utilidad esperada de un jugador derivada de un perfil de estrategias mixtas σ. En juegos repetidos con horizonte finito, suele considerarse la suma (en ocasiones *descontada*) de las utilidades esperadas obtenidas en cada período. En juegos con horizonte infinito, sin embargo, la suma infinita de las utilidades en cada período no está definida, y se consideran varias alternativas. En este ensayo la utilidad esperada de un jugador se calcula como la suma descontada de las utilidades de cada período. Sea $\delta < 1$ el vector de las tasas de descuento de los jugadores, la utilidad del jugador i se calcula como

$$V^\delta_i(\sigma) = (1 - \delta_i) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t_i (\sum_{h \in H} P_\sigma(h^t) U_i(\sigma^t(h^t))),$$

donde $P\sigma(h^t)$ es la probabilidad de h^t cuando los jugadores seleccionan sus acciones de acuerdo con σ. En otras palabras, tras cada historia h^t, $\sigma^t(h^t)$ indica la elección de acciones en el período t. Como cada historia ocurre con una cierta probabilidad según la estrategia σ, el pago es la media del pago tras cada historia según su probabilidad. El factor de normalización $(1 - \delta_i)$ sirve para poder comparar los pagos del juego repetido (G^T) y del juego de etapa (G): el valor normalizado de recibir un útil por período es 1. Cuando el factor de descuento esté sobrentendido, lo omitiremos en nuestra notación.

Un equilibrio de Nash de un juego repetido se define de manera análoga al de un juego en forma normal: un perfil de estrategias σ es un equilibrio de Nash si ningún individuo tie-

[1] La inclusión de $a^0 = \bar{a}$ facilita la formalización de las estrategias posibles en el juego G^T.

ne una estrategia alternativa $\sigma_i' \in \Delta F_i$ tal que $V_i^\delta(\sigma_{-i},\sigma_i') > V_i^\delta(\sigma)$. En un juego repetido, sin embargo, un perfil de estrategias de Nash puede prescribir un comportamiento irracional fuera de la «senda de equilibrio». El concepto de *equilibrio perfecto en subjuegos* permite distinguir aquellos equilibrios de Nash consistentes con un comportamiento racional de aquellos que no los son. Un perfil de estrategias σ es equilibrio perfecto en subjuegos, *SPE*, si el comportamiento que prescribe en cada subjuego constituye un equilibrio de Nash del subjuego. La definición de *SPE* introduce el requisito de consistencia temporal en la noción de equilibrio.

Una característica de los juegos repetidos con horizonte infinito es su estructura *estacionaria:* cada subjuego definido por una historia h^t es virtualmente idéntico al juego G^∞. Dada una estrategia σ y una historia h, denotamos por $V^{\delta h}(\sigma)$ los *pagos de continuación* en el subjuego que empieza en t, definidos como el vector de las utilidades esperadas de los jugadores en el subjuego renormalizadas de manera que queden actualizadas al período t. El pago de continuación de un jugador que reciba un útil por período a partir del período t es 1.

Los juegos con múltiples etapas son análogos a los repetidos, pero con la característica de que en cada período se juega un juego en forma normal diferente. Finalmente, conviene señalar que ambos tipos de juegos repetidos con horizonte finito son casos especiales de *juegos en forma extensiva,* a los referiremos sólo al final de este ensayo.

3. Equilibrios a prueba de renegociación

En esta sección estudiamos el problema de la renegociación en el marco de los juegos repetidos. Se discuten varias definiciones alternativas de equilibrio a prueba de renegociación, algunas de las cuales pueden ser ampliadas a juegos con múltiples etapas o a juegos en forma extensiva. En primer lugar discutimos el problema de la renegociación en el ejemplo de la Figura 3.1. Este juego (tomado de Berheim y Ray[9]) es un *dilema del prisionero* al que se ha añadido una «estrategia de castigo». El juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, (M, C) y (B, R). *Si* los jugadores pudieran comunicarse cabría esperar el equilibrio (M, C), puesto que éste domina en sentido de Pareto al equilibrio (B, R).

FIGURA 3.1

	L	C	R
T	4,4	0,5	-1,-1
M	5,0	1,1	-1,-1
B	-1,-1	-1,-1	0,0

Supóngase ahora que este juego se repite dos veces. En este juego repetido hay un equilibrio perfecto en subjuegos en el que los jugadores eligen (T, L) en el primer período (obsérvese que esta conducta «cooperativa» no es un equilibrio de Nash en el juego estático), y en el segundo período eligen (M, C) *si* en el primer período se jugó (T, L), o (B, R) si en el primer período no se jugó (T, L). La elección de (B, R) en el segundo período cuando algún jugador se desvía de (T, L) en el primer período puede interpretarse como una estrategia de castigo. Es inmediato comprobar que el perfil de estrategias descrito constituye un equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo, si los jugadores pueden comunicarse, esta estrategia no es creíble: en el momento de elegir (B, R) los jugadores pueden renegociar el «acuerdo» y elegir (M, C), lo que mejoraría a ambos. La posibilidad de cooperación en el primer período se ve comprometida por la falta de credibilidad del castigo en caso de incumplimiento.

Este ejemplo parece sugerir que la comunicación reduce las posibilidades de cooperación entre los jugadores. De hecho, en las demostraciones conocidas del «Folk Theorem» (que establece la posibilidad de conducta cooperativa en juegos repetidos con horizonte infinito) se utilizan estrategias de castigo similares a la descrita. Sin embargo, van Damme[12] ha mostrado que, al menos en el dilema del prisionero repetido infinitas veces, existen estrategias de equilibrio que sustentan la cooperación y no requieren que ambos jugadores sean castigados simultáneamente.

Para juegos repetidos con horizonte finito, el ejemplo anterior sugiere que la inducción hacia atrás permite una definición natural de equilibrio a prueba de renegociación, el equilibrio Pareto perfecto: en un equilibrio a prueba de renegociación, las estrategias del último período deben ser un equilibrio de Nash no Pareto dominado por ningún otro equilibrio de Nash. En el penúltimo período se consideran equilibrios a prueba de renegociación aquellos equilibrios que son Pareto óptimos entre los que implican equilibrios a prueba de renegociación en el último período. La definición continúa por inducción hasta el comienzo del juego. Esta definición se establece formalmente a continuación.

Definición 3.1. *(Bernheim y Ray[9]) Sea G^T un juego repetido.*

(i) Si $T = 1$, entonces σ es un equilibrio Pareto perfecto (PPE) si es un equilibrio de Nash de G que no está estrictamente dominado por otro equilibrio de Nash de G.

(ii) Supóngase que PPE ha sido definido para todo G^T con $T < K$. Se dice que σ es un equilibrio Pareto perfecto de G^K si

(a) σ es un equilibrio de Nash de G^K y para toda historia $h \in H$, $h \neq \emptyset$, σ^h es un PPE de g^h, y

(b) no existe $\sigma' \in \Pi_{i \in N}(\Delta F_i)$ que satisfaga (a) y tal que para todo $i \in N$: $u_i(\sigma) < u_i(\sigma')$.

Bernheim y Ray (B&R)[9] y Farrell y Maskin (F&M)[15] independientemente proponen una extensión de esta noción de equilibrio a juegos repetidos con horizonte infinito basada en dos hipótesis fundamentales: (1) la estructura estacionaria del juego repetido con horizonte infinito debe implicar que el conjunto de equilibrios a prueba de renegociación sea el mismo en cada subjuego (es decir, la noción de equilibrio debe ser consistente con la estacionariedad del juego), y (2) tras cualquier historia del juego, un acuerdo será renegociado (abandonado) si y sólo si hay disponible un equilibrio a prueba de renegociación que sea Pareto superior. Esto es, los jugadores permanecerán en el *status quo* a menos que todos puedan mejorar de una manera creíble. El primer paso de estos autores es detectar los equilibrios perfectos en subjuegos llamados *débilmente a prueba de renegociación* (*WRP*) en la terminología de Farrell y Maskin. Un conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos es *WRP* si entre todos los pagos de continuación inducidos por estos equilibrios, no hay dos comparables en sentido de Pareto. La idea es rechazar como viable un equilibrio que permite, tras una determinada historia, una continuación que da a los jugadores unos pagos muy pequeños comparados con los que se pueden conseguir, según un equilibrio de este mismo conjunto, en otra continuación posible del juego.

Definición 3.2. *(F&M, B&R) Sea P conjunto de un equilibrios perfectos en subjuegos del juego* G^{∞}. *P es débilmente a prueba de renegociación (WRP) si no existen* $\sigma, \sigma' \in P$, h, $h' \in H$ *tales que para cada* $i \in N$, *se tiene* $V_i(\sigma^h) > V_i(\sigma'^{h'})$.

La definición de *WRP* requiere que el conjunto de equilibrios tenga consistencia interna: un equilibrio de este conjunto no debe ser Pareto dominado por otro equilibrio del conjunto. Nótese, además, que si un equilibrio perfecto en subjuegos pertenece a un conjunto *WRP*, él mismo constituye un conjunto *WRP*. Considérese, por ejemplo, el juego del dilema del prisionero de la Figura 1.2. Es fácil mostrar que para factores de descuento (δ) inferiores a 1/4 el único equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido con horizonte infinito consiste en jugar (D, D) en todos los períodos. Cuando el factor de descuento de cada individuo es superior a 1/4 aparecen nuevos equilibrios. Por ejemplo, el perfil de estrategias σ en el que cada jugador elige C en el primer período, y después elige C cuando en el período anterior ocurrió (C, C) y elige D en otro caso, es un equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo σ no pertenece a ningún conjunto *WRP* pues el pago de continuación tras (D,D) (es decir (1,1)) está dominado por el pago de continuación tras (C, C) (es decir, (4,4)). El siguiente perfil de estrategias describe un *SPE* que es *WRP* en el que se obtiene el resultado cooperativo en cada etapa: cada jugador elige C en el primer período y continúa con este comportamiento cooperativo mientras el oponente continúe también eligiendo C. Si el jugador i deja de cooperar (y el j no), entonces el jugador j juega D hasta que el jugador i elija C. Tan pronto como el jugador i haya mostrado su arrepentimiento jugando C, el jugador j perdona la desviación inicial y retorna también al modo de juego cooperativo. Nótese que esta estrategia no requiere jugar D siempre que el oponente haya jugado D (esta estrategia es conocida como «Tit-for-Tat»), sino sólo si lo ha hecho como desviación del comportamiento cooperativo (y no como parte del castigo).

Para describir más formalmente este comportamiento utilizaremos la noción de *perfil simple de estrategias* (Abreu[1]). Un perfil simple de estrategias $a(\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ (los subíndices corresponden a la componente) se describe por (i) un perfil de acciones π_0 para el primer período y para los períodos posteriores si no hay ninguna desviación, y (ii) un perfil de acciones π_i para cada jugador $i \in N$, que se utiliza después de una desviación de dicho jugador. En estas estrategias incorporaremos la convención de que la numeración de los períodos comienza a contar desde cero cada vez que se cambia de componente. Con esta notación la estrategia anterior es el perfil simple definido por

π_0: jugar siempre (C, C)

π_1: jugar (C, D) por un período ($t = 0$) y seguir con (C, C)

π_2: jugar (D, C) por un período ($t = 0$) y seguir con (C, C)

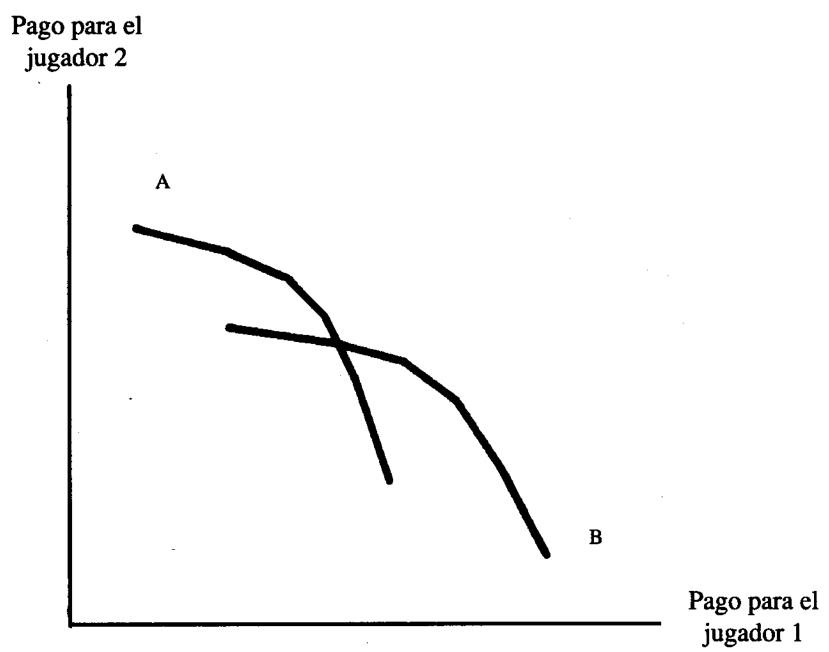
Para verificar que el perfil anterior es un *WRP* con $\delta \geq 1/4$, obsérvese que los pagos de continuación están dados por

$$V_i^{\delta}(\pi_k^t) = \begin{cases} (4,4) & \text{si } k = 0, \text{ o } t > 0, \\ (4\delta, 5 - \delta) & \text{si } k = 1, \text{ y } t = 0, \\ (5 - \delta, 4\delta) & \text{si } k = 2, \text{ y } t = 0, \end{cases}$$

de manera que ningún pago de continuación domina a otro. Van Damme demuestra que cuando cada jugador puede observar no sólo las acciones pasadas, sino también las estrategias mixtas usadas por el oponente, entonces cualquier pago individualmente racional es sostenible como pago del juego repetido en estrategias *WRP*. En otras palabras, el concepto *WRP* no reduce el conjunto de resultados posibles en el dilema del prisionero repetido (aunque sí reduce el conjunto de equilibrios en otros ejemplos —ver van Damme[12]).

Para formalizar la noción de equilibrio a prueba de renegociación es preciso introducir también un requisito de consistencia externa: un perfil perteneciente a un conjunto de equilibrios *WRP* no debe estar Pareto dominado por otro perfil perteneciente a algún otro conjunto *WRP*. Es decir, si un equilibrio σ que pertenece a un conjunto *WRP* puede inducir en algún subjuego un vector de pagos de continuación que esté Pareto dominado por algún otro vector de pagos inducido por un equilibrio σ' en otro conjunto también *WRP*, ¿qué razón habría para jugar de acuerdo con σ si en algún subjuego los jugadores pueden proponer σ', que es unánimemente preferido e igualmente «creíble» según el criterio *WRP?* Un conjunto de equilibrios *WRP*, ninguno de cuyos equilibrios está Pareto dominado en ningún subjuego por algún otro equilibrio de cualquier otro conjunto *WRP*, es llamado *fuertemente a prueba de renegociación* (*SRP*). Mientras que cada juego posee algún conjunto *WRP*, la existencia de conjuntos *SRP* no está garantizada; puede no haber un equilibrio *WRP* Pareto superior, sino dos o más *WRP* Pareto maximales que se intersectan, como muestra la Figura 3.2. La curva A representa el conjunto de pagos de continuación para los dos jugadores de un determinado juego según un equilibrio perfecto en subjuegos y la *B* según otro.

FIGURA 3.2



Esta última posibilidad conduce a diferentes e interesantes definiciones intermedias entre *WRP y SRP*, aunque ninguna de ellas sea completamente satisfactoria. La primera que veremos es la propuesta por Bernheim y Ray, que se basa en una relación de dominación entre conjuntos de equilibrios definida de la siguiente manera. El conjunto de equilibrios P *domina directamente* al conjunto de equilibrios P' ($P \succ P'$) si existe algún pago de continuación en P Pareto superior a algún pago de continuación en P'. Se dice que el conjunto P *domina* al P' ($P \succ^* P'$) si $P \succ P'$ o si existe un número finito de conjuntos $P_1, \ldots, P_n$ tales que $P \succ P'_1 \succ P_2 \succ \ldots \succ P_n \succ P'$.

Con esta relación de dominación, B&R definen un *conjunto consistente* como aquel conjunto de equilibrios *WRP*, P, tal que para todo otro conjunto de equilibrios *WRP*, P', se cumple que si $P' \succ^* P$ entonces $P \succ^* P'$. Todo juego repetido tiene al menos un conjunto consistente. En un juego cuyos pagos de continuación de equilibrio son los reflejados en la Figura 3.2, cada equilibrio constituiría un conjunto consistente: en las situaciones inducidas por cada uno de estos equilibrios, dicho equilibrio es creíble mientras el otro no lo es, de manera que la credibilidad de uno se basa en la no credibilidad del otro.

F&M definen el *conjunto de equilibrios fuertemente a prueba de renegociación relativo* (*RSRP*) de la siguiente manera. Primero se consideran conjuntos formados por la unión de conjuntos *WRP*. De entre ellos se consideran aquellos conjuntos maximales dentro de la clase de conjuntos que tienen la propiedad de que algún conjunto *WRP* está enteramente en la frontera eficiente. Un conjunto *WRP* que esté en la frontera eficiente de un conjunto maximal así considerado será llamado *RSRP*. Es decir, un conjunto es *RSRP* si es *SRP* restringido a algún conjunto maximal de *SPE*. *RSRP* requiere entonces reducir al mínimo la posibilidad de dominación externa, sin llegar a excluirla.

Pearce[29] propone una definición basada en una idea diferente, cuya motivación se aprecia más claramente en los juegos con equilibrios perfectos en subjuegos que tienen pagos medios simétricos. En el momento t, los jugadores rehusarán continuar con un equilibrio cuyos pagos a partir de t son menores que los de este mismo equilibrio tras alguna otra historia, si la única razón para ello es que esto era necesario para inducir cierta cooperación en el pasado. Sí estarán dispuestos a seguir, en cambio, si esta continuación es necesaria como incentivo para acciones futuras. Sea G^∞ un juego repetido con horizonte infinito, y sea g un subjuego cualquiera de G^∞; dado un perfil de estrategias σ del juego G^∞, $C_g(\sigma)$ denota el conjunto de vectores de pagos de continuación en g inducidos por la estrategia σ. Diremos que un juego es simétrico si todos los jugadores tienen el mismo conjunto de estrategias y si para cada par de jugadores i, j se cumple $u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_n) = u_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$. Un equilibrio es simétrico si ofrece pagos idénticos a todos los jugadores.

Definición 3.3. *(Pearce[29]) Sea G^∞ un juego repetido simétrico con horizonte infinito. Se dice que σ es un SPE simétrico (SSPE) a prueba de renegociación si para todo subjuego g de G^∞ y todo $x \in C_g(\sigma)$ no existe otro SSPE σ' tal que*

(i) $U(\sigma') > x$, y
(ii) $y \geq U(\sigma')$ para todo $y \in C_g(\sigma')$.

Obsérvese que no se requiere que todos los pagos tras cualquier posible historia sean no-dominados (como en *WRP*), sino que no sea posible encontrar en el conjunto de equilibrios a prueba de renegociación ningún otro que evite estos pagos tan bajos. Esta noción de equilibrio tiene implícita la idea de no crear «precedentes»: los jugadores no deben creer que pueden salir de un castigo tal vez demasiado severo en el presente, pero pueden comprometerse a no caer en él en el futuro.

Asheim[3] presenta una definición alternativa siguiendo un enfoque totalmente diferente, que usa la *Teoría de las Situaciones Sociales* de Greenberg[21], y que a su vez es una extensión de la definición de conjuntos estables de von Neumann y Morgenstern[28]. La idea es dividir el conjunto de equilibrios perfectos para subjuegos de un juego repetido y de sus posibles continuaciones en dos subconjuntos A y B, de manera que en A estén los equilibrios creíbles y en B los no creíbles. La credibilidad se basará en que, dentro del conjunto A, ningún equilibrio ofrece pagos Pareto superiores a otro en el propio conjunto A (estabilidad interna de A), y en que para cada pago de algún equilibrio en B, existe algún equilibrio en A que ofrece mejores perspectivas a todos los jugadores (estabilidad externa). A será considerado como el conjunto estable, el que reúne a los equilibrios a prueba de renegociación al comienzo del juego y tras cada historia.

Para la definición formal necesitamos los siguientes conceptos. Un *sistema abstracto* von Neumann-Morgenstern es un par $(D, \prec)$ donde D es un conjunto arbitrario (por ejemplo, de equilibrios) y $\prec$ es un relación binaria (interpretada como de dominación). Dado $f \in D$, el *dominio de* f es el conjunto $\Delta(f) = \{d \in D \mid d \prec f\}$. Esto es, $\Delta(f)$ contiene todos los elementos de D que f domina de acuerdo con la relación de dominación $\prec$. De manera similar, dado un subconjunto $F \subset D$, el dominio de F es el conjunto $\Delta(F) = \cup\{\Delta(f) \mid f \in F\}$. Un conjunto $F \subset D$ es un *conjunto abstracto estable* von Neumann-Morgenstern (ASS) del sistema $(D, \prec)$ *si* $F = D \setminus \Delta(F)$.

En la definición de equilibrio de Asheim, en un juego repetido o, en general, en un juego en forma extensiva, D es el conjunto de pares (g^h,σ), donde g^h es un subjuego cualquiera (incluido el propio juego), y σ es un *SPE* de este subjuego; i.e.,

$$D = \{(g^h,\sigma) \mid h \in H, \sigma \in SPE(g^h)\},$$

donde $SPE(g^h)$ es el conjunto de *SPE* de g^h.

La relación de dominación se define de la siguiente manera. Dados $(g^h, \sigma), (g^k, \nu) \in D$, escribimos

$$(g^h, \sigma) \prec (g^k, \nu) \text{ Si y sólo si } k \in H^h \text{ y } u_i^k(\sigma) < u_i^k(\nu) \text{ para todo } i \in N,$$

donde H^h es el conjunto de historias que pueden ocurrir tras la historia h, y $u_i^h(\sigma)$ es la utilidad para i de seguir la estrategia σ, evaluada tras la historia h. Sobre la base del sistema abstracto $(D, \prec)$ así definido puede extenderse la noción de *equilibrio Pareto perfecto* como sigue.

Definición 3.4. *(Asheim) Sea G^T un juego repetido con un horizonte finito o infinito. Un perfil de estrategias σ es un equilibrio Pareto perfecto de G^T si σ es un equilibrio perfecto en subjuegos de G^T, y si existe un conjunto abstracto estable F de $(D, \prec)$ tal que $(G^T, \sigma) \in F$.*

Esta definición extiende la noción de equilibrio Pareto perfecto a juegos repetidos con horizonte infinito. Para juegos repetidos con horizonte finito, esta definición es equivalente a la Definición 2.1. Además, la noción de equilibrio Pareto perfecto puede extenderse fácilmente a juegos en forma extensiva, algo que no ocurre con ninguna otra de las definiciones para juegos de horizonte infinito vistas hasta ahora.

Desde el punto de vista conceptual, la definición de Asheim ofrece una explicación clara de por qué se incluyen unos equilibrios y no otros en el conjunto de los equilibrios a prueba de renegociación. No se ha establecido existencia y, como el propio Asheim muestra, cuando este tipo de equilibrio existe, puede no satisfacer alguna noción de estacionariedad incluso en ejemplos sencillos. La estacionariedad del equilibrio (la idea de que el conjunto de equilibrios viables sea independiente de la historia) parece, en principio y tal como se indicó al comienzo de esta sección, una propiedad deseable, dada la estructura estacionaria de los juegos repetidos con horizonte infinito. Asheim argumenta, en cambio, que si la no estacionariedad es necesaria para que exista un acuerdo de equilibrio a prueba de renegociación, no debería haber ningún problema con aceptar este hecho.

El siguiente ejemplo de Asheim[3] permite comparar varias de las definiciones discutidas en esta sección. Considérese el juego repetido con horizonte infinito donde los jugadores se enfrentan en cada período al juego de la Figura 3.3. Supóngase que el factor de descuento de ambos jugadores es $\delta = \frac{1}{2}$, y que sólo están permitidas estrategias puras.

FIGURA 3.3

	a_{2m}	a_{2n}	a_{2p}	a_{2q}
a_{1m}	1,3	-8,-8	-8,0	-8,-8
a_{1n}	0, 8	2,4	4,0	7,8
a_{1p}	-8,-8	-8,-8	3,1	-8,-8
a_{1q}	8,-8	-8,-8	-8,0	4,2

Sea $a^j = (a_{1j}, a_{2j})$ y denotemos por π_j la repetición infinita de a^j, $j = m, n, p, q$. Para definir los equilibrios de interés será de nuevo útil usar el concepto de perfil simple de estrategias. Con esta notación es fácil ver que $\sigma^n = (\pi_n, \pi_n, \pi_n)$, $\sigma^p = (\pi_p, \pi_n, \pi_n)$ y $\sigma^q = (\pi_q, \pi_m, \pi_m)$ son cada uno un conjunto *WRP* ya que los posibles pagos de continuación, dentro de cada equilibrio, no son comparables. El equilibrio σ^n es *SRP* puesto que ninguna continuación, ni en σ^n ni en otro equilibrio *WRP*, es preferida por los dos jugadores a π_n el resultado de obedecer σ^n. En cambio, σ^q no es *SRP* puesto que π_m (una posible continuación en σ^q) es unánimemente menos preferida que π_n (posibles continuaciones tanto en σ^n como en σ^p). Como π_q es preferido a π_p por los dos jugadores, tampoco σ^p es *SRP*. Según la definición de Asheim, σ^p sí es *PPE:* informalmente, la razón es que σ^q (único equilibrio que tiene una continuación preferida a alguna continuación de σ^p) no es una objeción viable, puesto que él mismo es objetable. Es inmediato observar que σ^n también es *PPE*. Contrariamente a lo que sugiere este ejemplo, no existe relación de inclusión alguna entre los conceptos de *SRP* y *PPE*.

En la línea de no abandonar la estacionariedad se encuentra el trabajo de Abreu y Pearce[2]. Estos autores continúan en la formulación de conjuntos estables, pero relajando la noción de estabilidad externa y buscando conjuntos estables estacionarios en el conjunto de las desviaciones. Además, introducen un concepto de dominación distinto al de Pareto optimalidad que refleja consideraciones de poder de regateo.

Como Kahn y Mookherjee[23] han mostrado, no siempre es posible dividir los elementos de un sistema en dos conjuntos (acaso uno de ellos vacío) de acuerdo con la metodología de los conjuntos estables. En el trabajo citado se propone la idea de semiestabilidad, básicamente igual a la de estabilidad, pero en la que la división se hace en tres conjuntos, el «bueno» (correspondiente al antiguo estable), el «malo» (aquél cuyos elementos son dominados) y el «feo» (el complementario de la unión de los anteriores). Semiestabilidad coincide con estabilidad cuando el conjunto de acciones (estrategias puras) es finito. Con este nuevo concepto, Asilis, Kahn y Mookherjee[4] encuentran una descripción unificada para las teorías de renegociación de Farrell y Maskin, Bernheim y Ray y de Asheim, en donde las distintas definiciones se derivan de considerar distintas relaciones de dominación en la definición de semiestabilidad.

Otro trabajo unificador lo constituye el de Bergin y MacLeod[7]. Aquí se presenta un sistema axiomático que genera varias de las soluciones existentes en la literatura. Sin embargo, estas axiomatizaciones parecen forzadas, por lo menos en algunos casos.

4. Coaliciones

En esta sección se presentan varias nociones de *equilibrio a prueba de coaliciones* para juegos estáticos (i.e., en forma normal). En la siguiente sección se presentan extensiones alternativas de algunos de estos conceptos para juegos dinámicos (i.e., en forma extensiva), que incorporan también la posibilidad renegociación.

En la discusión del problema de la renegociación, se considera la posibilidad de desviaciones colectivas realizadas por el conjunto de todos los jugadores (además de desviaciones individuales). Sin embargo, si los jugadores pueden comunicarse entre sí, no puede excluirse la posibilidad de que cualquier coalición (no necesariamente de todos los jugadores) discuta y organice desviaciones conjuntas. En juegos con dos jugadores, en donde no hay coaliciones intermedias entre las individuales y la de todos los jugadores, el concepto de equilibrio a prueba de renegociación es satisfactorio. En juegos con más de dos jugadores, es preciso considerar la posibilidad de que desviaciones llevadas a cabo por coaliciones intermedias desestabilicen o hagan inviable un acuerdo.

Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma normal, y sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i$ un perfil de estrategias. Supongamos que cualquier coalición de jugadores $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, considera desviarse. Asumiendo que el comportamiento de la coalición complementaria es el prescrito por σ, una desviación de la coalición S resultaría en un nuevo perfil de estrategias $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n) \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i$, donde $\sigma'_i = \sigma_i$ para cada $i \in N \setminus S$. Así pues, dado un perfil de estrategias mixtas σ y una coalición S, escribimos $D(\sigma, S)$ para denotar el *conjunto de desviaciones factibles de σ por la coalición S*. Obsérvese que $\sigma \in D(\sigma, S)$, puesto que siempre es factible para una coalición comportarse de acuerdo con el perfil de estrategias prescrito.

El concepto de desviación factible es muy útil para definir nociones de equilibrio alternativas. Por ejemplo, un *equilibrio de Nash* es un perfil de estrategias tal que ningún individuo tiene una desviación factible que le reporta mayor utilidad esperada. Cuando los jugadores pueden comunicarse entre sí, el hecho de que un perfil de estrategias no sea *vulnerable* a desviaciones individuales no garantiza que un perfil de estrategias sea «de equilibrio», puesto que un grupo de individuos podría organizar una desviación conjunta si con ello puede beneficiarse. En el juego de coordinación de la Figura 1.1, por ejemplo, los perfiles de estrategias (T, L) y (B, R) son ambos equilibrios de Nash (ningún individuo puede mejorar desviándose); sin embargo, el perfil (B, R) es vulnerable a la desviación de ambos jugadores consistente en jugar (T, L), lo que resultaría en una mayor utilidad para ambos jugadores. Si estas desviaciones son posibles, el perfil (B, R) no es un equilibrio .

Aumann introduce la noción de *equilibrio fuerte de Nash* (*SNE*); un perfil de estrategias mixtas es un *SNE* si ninguna coalición puede desviarse y mejorar a todos sus miembros.

Definición 4.1. *(Aumann[5]) Un perfil σ es un equilibrio fuerte de Nash si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tiene una desviación factible $\sigma' \in D(\sigma, S)$ tal que para todo $i \in S$ se cumple $U_i(\sigma') > U_i(\sigma)$.*

Puesto que un equilibrio fuerte de Nash debe ser invulnerable frente a desviaciones de la coalición de todos los jugadores, debe producir un resultado (débilmente) Pareto óptimo. En el juego de la Figura 1.1, por ejemplo, (B, R) no es un equilibrio fuerte de Nash, mientras que (T, L) sí lo es. La noción de equilibrio fuerte de Nash, no obstante, puede resultar demasiado fuerte, pues requiere que un perfil de estrategias sea invulnerable a desviaciones que a su vez son vulnerables a desviaciones ulteriores, y que, por tanto, no son *viables*.

Por ejemplo, el único equilibrio de Nash del dilema del prisionero de la Figura 1.2, (D, D), no es un equilibrio fuerte de Nash: la coalición de ambos jugadores puede desviarse y jugar (C, C), resultando en una mejora para ambos jugadores. Esta desviación, sin embargo, es vulnerable frente a desviaciones ulteriores de cualquiera de los jugadores (el perfil (C, C) no es un equilibrio de Nash), y por tanto dicha desviación no es viable. Puesto que los acuerdos que los jugadores puedan alcanzar no tienen fuerza contractual, debe esperarse que cualquier jugador o grupo de jugadores se desvíen de un acuerdo si con ello pueden incrementar su utilidad. La desviación (C, C) no es, pues, viable y por tanto no debería amenazar la «estabilidad» del equilibrio (D, C). Obsérvese que puesto que todo equilibrio fuerte de Nash es un equilibrio de Nash, dicho juego no tiene ningún equilibrio fuerte de Nash. De hecho, la no existencia de un equilibrio fuerte de Nash es una situación común.

Bernheim, Peleg y Whinston[8] (a quienes nos referiremos como BP&W), introducen un criterio para distinguir las desviaciones viables de las que no lo son: desviaciones viables o *sostenibles* (*self-enforcing* en la terminología de BP&W) se caracterizan por ser invulnerables a desviaciones *sostenibles* ulteriores. La noción de desviación sostenible es, pues, recursiva.

Definición 4.2. *Sea $\sigma \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i$ y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, arbitrarios. El conjunto de desviaciones sostenibles de σ por la coalición S, $DS(\sigma, S)$, viene dado por*

(i) si $|S| = 1$, entonces $DS(\sigma, S) = D(\sigma, S)$;

(ii) si $|S| > 1$, entonces $DS(\sigma, S) = \{\sigma' \in D(\sigma, S) \mid \nexists\ [R \in 2^S \backslash S, R \neq \emptyset, \sigma'' \in DS(\sigma', R)]$ tal que $U_i(\sigma'') > U_i(\sigma'), \forall_i \in R\}$.

La noción de desviación sostenible proporciona un criterio para determinar si una desviación es viable o no lo es. Un perfil de equilibrio a prueba de coaliciones no debe ser vulnerable a desviaciones sostenibles. Ésta es la noción de equilibrio propuesta por BP&W.

Definición 4.3. *(Berheim, Peleg y Whinston[8]) Un perfil σ es un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones (CPNE) si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tiene una desviación sostenible $\sigma' \in D(\sigma, S)$ que mejora a sus miembros (i.e., tal que para todo $i \in S$ se cumple $U_i(\sigma') > U_i(\sigma)$).*

BP&W formalizan la noción de *CPNE* de una manera distinta, aunque equivalente. Dado $\sigma \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i$ y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, se define el juego $G \mid \sigma_{-s} = (S, (A_i)_{i \in S}, (\tilde{u}_i)_{i \in S})$,donde para cada $a_S \in \Pi_{i \in S} A_i$,

$$\tilde{u}_i(a_S) = \sum_{a_{-S} \in A_{-S}} \Big(\prod_{j \in N \setminus S} \sigma_j(a_j) \Big) u_i(a_S, a_{-S}).$$

Obsérvese que $G \mid \sigma_{-S}$ es el juego al que se enfrenta la coalición S si la coalición complementaria $N \setminus S$ juega de acuerdo con el perfil σ_{-S}. En este juego, los pagos asociados con un perfil de estrategias a_{it} son simplemente la utilidad esperada que los jugadores de S obtienen cuando la coalición complementaria selecciona sus acciones de acuerdo con σ_{-S} y los jugadores de S eligen a_S. La definición de BP&W es recursiva.

Definición 4.3b. *Sea p $\sigma \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i$.*

(i) Si $\mid N \mid = 1$, entonces σ es un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones si para todo $\sigma' \in \Delta A$, $U_1(\sigma) \geq U_1(\sigma')$.

(ii) Supóngase que la noción de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones se ha definido para juegos con $\mid N \mid < n$, y sea G un juego con $\mid N \mid = n$; (ii.1) σ es sostenible en G si para cada coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, σ_S es un CPNE en el juego $G \mid \sigma_{-S}$; (ii.2) σ es un CPNE si es sostenible en G y si no existe σ' sostenible en G tal que $u_i(\sigma') > u_i(\sigma)$ para todo $i \in N$.

Esta definición es equivalente a la Definición 4.3 (véase Moreno y Wooders [26]), y lleva asociado implícitamente el concepto de desviación sostenible formulado en la Definición 4.2.

La motivación de esta noción de equilibrio a prueba de coaliciones puede entenderse mejor si se tiene en mente el siguiente escenario. Los jugadores se encuentran en una sala en donde discuten libremente las posibles estrategias que podrían emplear. Cualquier jugador puede abandonar la sala en cualquier momento, siempre que deje escrita en sobre cerrado su estrategia (cuya elección es personal). Ahora bien, si un jugador deja la sala, aquéllos que todavía permanezcan pueden considerar fija la estrategia del que no está presente e intentar un nuevo acuerdo entre ellos. Se trata entonces de encontrar un acuerdo tal que, sin importar el orden en que los jugadores abandonen la sala, los que se quedan no encuentren incentivos para desviarse.

El concepto de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones selecciona (T, L) en el juego de la Figura 1.1 como el único equilibrio de Nash a prueba de coaliciones. En el juego de la Figura 1.2, (D, D) es un *CPNE* (la desviación (C, C) no es sostenible). De hecho, en juegos con solo dos jugadores, el conjunto de *CPNE* es simplemente el conjunto de equilibrios de Nash que no están Pareto dominados por otros equilibrios de Nash. Así pues, en juegos con dos jugadores siempre existe un *CPNE.* Desafortunadamente, en juegos con tres o más jugadores no puede garantizarse la existencia de un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones. Por ejemplo, el juego de la Figura 4.1 no tiene ningún *CPNE.*

FIGURA 4.1

P_3

	P_2	N_2
P_1	1,1,-2	-1,-1,2
N_1	-1,-1,2	-1,-1,2

N_3

	P_2	N_2
P_1	-1,-1,2	-1,-1,2
N_1	-1,-1,2	1,1,-2

En este juego, los jugadores 1 y 2 juegan *Pares o Nones* contra el jugador 3. Si los tres jugadores eligen pares o los tres jugadores eligen nones, entonces los jugadores 1 y 2 ganan una moneda cada uno, y el jugador 3 pierde dos monedas; en otro caso, los jugadores 1 y 2 pierden una moneda cada uno, y el jugador 3 gana dos monedas.

Este juego tiene tres equilibrios de Nash, dos en estrategias puras (los perfiles (P_1, P_2, N_3) y (N_1, N_2, P_3), que resultan en los pagos $(-1, -1,2)$), y uno en estrategias mixtas (en el que cada jugador juega pares con probabilidad $\frac{1}{2}$ y que resulta en las utilidades esperadas $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$). Ninguno de estos equilibrios es un *CPNE,* pues cada uno de ellos es vulnerable a una desviación sostenible por parte de la coalición de los jugadores 1 y 2: en los equilibrios en estrategias puras, si ambos jugadores alteran simultáneamente su estrategia y eligen la misma estrategia que el jugador 3, inducen el resultado $(1,1,-2)$; en el equilibrio en estrategias mixtas, los jugadores 1 y 2 pueden desviarse eligiendo ambos pares o ambos nones, lo que resultaría en las utilidades esperadas $(0,0,0)$. Estas desviaciones son beneficiosas para ambos jugadores, y además son sostenibles (ninguno de los jugadores puede mejorar mediante una desviación ulterior). Ninguno de los equilibrios de Nash del juego es pues un *CPNE,* y por tanto este juego no tiene ningún equilibrio de Nash a prueba de coaliciones (obsérvese que todo *CPNE* es también un equilibrio de Nash).

El concepto de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones adolece de los mismos problemas de existencia que nociones como la del núcleo en juegos cooperativos. Moreno y Wooders[26] han demostrado que cuando el conjunto de perfiles de estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas contiene un perfil de estrategias Pareto superior a los otros perfiles de estrategias en este conjunto, dicho perfil de estrategias es un *CPNE.* Así, cuando el conjunto de estrategias que sobrevive la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas contiene un único punto (i.e., cuando el juego es «resoluble por dominación»), dicha estrategia (el único equilibrio de Nash del juego) es un *CPNE.*

Además del inconveniente de la no existencia, se han señalado en la literatura otros dos tipos de problemas relacionados con la noción de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones: en primer lugar, el criterio para determinar si una desviación es sostenible podría no ser adecuado, pues sólo se consideran desviaciones ulteriores de subcoaliciones de la coalición desviante, mientras que el comportamiento de la coalición complementaria se supone dado (por el perfil de estrategias del que la coalición está considerando desviarse). Es concebible, sin embargo, que una desviación sea contrarrestada con otra desviación en la que participen miembros de la coalición inicialmente desviante y miembros de la coalición complementaria (que no participaban en esta desviación). En segundo lugar, la noción de *CPNE* no contempla la posibilidad de que los jugadores alcancen acuerdos que requieran la selección de sus estrategias de manera correlada. Este problema se discute a continuación.

4.1. Comunicación y correlación

Como ya hemos indicado, una noción de equilibrio que tenga en cuenta las posibilidades de cooperación existentes entre los individuos tiene interés en situaciones en las que los jugadores tienen la oportunidad de comunicarse antes de decidir su estrategia. Comunicación introduce además la posibilidad de que los jugadores seleccionen su acciones (y desviaciones) de manera correlada.

Considérese por ejemplo el juego Pares y Nones con tres jugadores de la Figura 4.1. En este juego, los intereses de los jugadores 1 y 2 son completamente coincidentes (pierden siempre que sus acciones no coinciden). Si tuvieran la oportunidad de comunicarse, cabría esperar que ambos eligiesen H o ambos eligiesen T. Además, puesto que sus intereses son completamente opuestos a los del jugador 3, estaría en su interés ocultar su estrategia al jugador 3, quizá eligiendo aleatoriamente entre (P_1, P_2) y (N_1, N_2). Este tipo de *estrategias correladas,* sin embargo, resultaría en una distribución de probabilidad sobre los perfiles de acciones que no podría obtenerse si los jugadores seleccionasen sus acciones de acuerdo con un perfil de estrategias mixtas.

De hecho, existe una estrategia correlada que es invulnerable a cualquier desviación. En esta estrategia correlada, μ^*, los jugadores 1 y 2 eligen (P_1, P_2) con probabilidad $\frac{1}{2}$ y (N_1, N_2) con probabilidad $\frac{1}{2}$, y el jugador 3 elige P_3 o N_3 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Claramente ningún jugador puede mejorar desviándose: los jugadores 1 y 2 perderían si eligiesen acciones distintas; dada la estrategia de los jugadores 1 y 2, el jugador 3 es indiferente entre P_3 y N_3 (o cualquier distribución de probabilidad sobre $\{P_3, N_3\}$). Por tanto, μ^* es un *equilibrio correlado.* Ninguna coalición tiene tampoco una desviación que mejore a sus miembros: los jugadores 1 y 2 obtienen la utilidad máxima dada la estrategia del jugador 3; por otra parte, puesto que los intereses del jugador 3 son completamente opuestos a los de los jugadores 1 y 2, ninguna coalición que contenga a este jugador puede mejorar. Así pues, esta estrategia es un equilibrio (correlado) a prueba de coaliciones, que debería ser reconocido como tal por cualquier noción de equilibrio a prueba de coaliciones.

Puesto que en la formulación de la noción de *CPNE* no se considera la posibilidad de que los jugadores seleccionen sus acciones de manera correlada (sólo se consideran estrategias mixtas), este comportamiento no se prevé: el concepto de *CPNE* no contempla la posibilidad de que los jugadores 1 y 2 coordinen sus acciones de la forma descrita.

Así pues, cuando los jugadores pueden comunicarse entre sí, hay que considerar la posibilidad de que elijan sus estrategias de manera correlada. Esta posibilidad amplía considerablemente el conjunto de acuerdos posibles, aunque también amplia el conjunto de desviaciones coalicionales que han de considerarse (ahora se ha de prever la posibilidad de desviaciones correladas). A continuación se discuten tres nociones de equilibrio que incorporan la posibilidad de acuerdos y desviaciones correladas.

Basándose en la noción de desviación sostenible de la Definición 3.2 (implícita en el concepto de *CPNE*), Moreno y Wooders[26] proponen una noción equilibrio correlado a prueba de coaliciones para juegos con información completa e incompleta. Ray[31] propone una noción de equilibrio a prueba de coaliciones en la que las posibilidades de correlación están limitadas a aquellas que puedan obtenerse mediante un dispositivo aleatorio dado exógenamente. Finalmente, Einy y Peleg[13] introducen una noción de equilibrio con comunicación a prueba de coaliciones que identifica aquellos acuerdos (i.e., estrategias correladas) que no son vulnerables *ex-post* (una vez que cada jugador conoce la acción que ha sido seleccionada sobre la base de la estrategia bajo consideración) a desviaciones correladas de ninguna coalición de individuos.

4.2. *Equilibrio correlado a prueba de coaliciones*

En este apartado y en el siguiente se discuten las nociones de equilibrio correlado a prueba de coaliciones formulados por Moreno y Wooders[26] (a partir de ahora M&W) y Ray[31] en el contexto de juegos con información completa.

Dado un juego en forma normal $G = (N, A, u)$, una estrategia correlada μ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de perfiles de acciones A (i.e., μ es un miembro de ΔA); obsérvese que una estrategia correlada μ podría no ser descomponible en estrategias mixtas (para ello μ tendría que ser igual al producto de sus «marginales» sobre los conjuntos A_i). Cuando los jugadores eligen sus acciones de acuerdo con la estrategia $\mu \in \Delta A$, la utilidad esperada de cada jugador es

$$U_i(\mu) = \sum_{a \in A} \mu(a) u_i(a).$$

La noción de equilibrio correlado a prueba de coaliciones propuesto por M&W otorga amplias posibilidades de desviación a las coaliciones de jugadores: dada una estrategia μ, el conjunto de desviaciones factible para una coalición S es el conjunto de todas las estrategias correladas que la coalición puede «inducir» seleccionando las acciones de los miembros de la coalición de acuerdo con una distribución de probabilidad que podría depender de las acciones seleccionadas (de acuerdo con μ) para la coalición. Así pues, la coalición S puede condicionar su desviación (la distribución de probabilidad sobre A_S que genera las acciones para los miembros de S) a las acciones que los miembros de S habrían de utilizar si fuesen a jugar de acuerdo con la estrategia μ.

Formalmente, dada una estrategia correlada μ y una coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, *el conjunto de desviaciones correladas de* μ *por la coalición* S, $DC(\mu, S)$, es el conjunto de estrategias correladas $\mu' \in \Delta A$ tal que para cada $a \in A$,

$$\mu'(a) = \sum_{\alpha_S \in A_S} \mu(\alpha_S, a_{-S}) \eta_S(a_S \mid \alpha_S),$$

donde η_S: $A_S \rightarrow \Delta A_S$.

La situación que M&W consideran puede entenderse mejor si suponemos que la estrategia correlada μ es implementada por un *mediador*, que selecciona un perfil de acciones para los jugadores de acuerdo con la distribución de probabilidad μ, y comunica (o *recomienda*) privadamente a cada jugador la acción que ha de jugar. Una coalición S puede desviarse de μ estableciendo un nuevo mediador que recibe la recomendaciones de los miembros de la coalición S, a_S, y selecciona un nuevo perfil de acciones para la coalición, $\tilde{a}_S$, de acuerdo con una distribución de probabilidad $\eta_S(a_S)$ sobre A_S. Este mediador comunica a cada miembro $i \in S$ la acción $\tilde{a}_i$ que ha de tomar.

Obsérvese que este esquema supone que cada miembro i de la coalición S sólo observa la recomendación $\tilde{a}_i$. Este supuesto evita los problemas de transmisión de información entre jugadores que plantearía problemas de compatibilidad con incentivos, y que habrían de tratarse en el contexto de juegos con información incompleta.

Sobre la base de esta noción de desviación correlada es posible formular muy sencillamente la noción de *equilibrio correlado:* una estrategia correlada $\mu \in \Delta A$ es un equilibrio correlado si ningún individuo $i \in N$ dispone de una desviación correlada de μ, $\mu' \in DC(\mu, i)$, tal que $U_i(\mu') > U_i(\mu)$. Asimismo, es posible formular una noción *equilibrio correlado fuerte* de manera análoga al concepto de equilibrio fuerte de Nash formulado por Aumann.

Definición 4.4. *(Moreno & Wooders [26]) Una estrategia correlada μ es un equilibrio correlado fuerte (SCE) si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tiene una desviación correlada $\mu' \in D(\mu,S)$ que mejora a sus miembros (i.e., tal que para todo $i \in S$ se cumple $U_i(\mu') > U_i(\mu)$).*

El concepto de equilibrio correlado fuerte adolece de los mismos inconvenientes que la noción de equilibrio fuerte de Nash (*SNE*)*:* para que una estrategia correlada sea un *SCE* ha de ser invulnerable a desviaciones correladas que podrían no ser sostenibles. Los mismos argumentos que se utilizaron para criticar el concepto de *SNE* en el ejemplo del dilema del prisionero de la Figura 1.2 son de aplicación al concepto *SCE;* el único equilibrio correlado de este juego, (D, D), no es un *SCE* por ser vulnerable a la desviación (C, C), a pesar de que esta desviación es también vulnerable a desviaciones ulteriores.

Para distinguir aquellas desviaciones correladas que son viables de las que no lo son, M&W introducen la noción de desviación correlada sostenible (para lo que basta sustituir en la Definición 4.2 los conjuntos de desviaciones factibles de una coalición, $D(\mu, S)$, por los conjuntos de desviaciones correladas, $DC(\mu, S)$), y formulan una noción de equilibrio correlado a prueba de coaliciones idéntico al propuesto por BP&W, excepto por el hecho de que los acuerdos y desviaciones posibles son estrategias correladas. Para cada $\mu \in \Delta A$ y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, sea $DCS(\mu, S)$ *el conjunto de desviaciones correladas sostenibles de* μ *por la coalición S.*

Definición 4.5. *(Moreno & Wooders[26]) Una estrategia correlada μ es un equilibrio correlado a prueba de coaliciones (CPCE) si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tiene una desviación $\mu' \in DCS(\mu, S)$, tal que para cada $i \in S$ se tiene $U_i(\mu') > U_i(\mu)$.*

En juegos con dos jugadores, el conjunto de *CPCE* es el conjunto de equilibrios correlados que no están Pareto dominados por otros equilibrios correlados. Por tanto, en juegos con dos jugadores la existencia de un equilibrio correlado a prueba de coaliciones está garantizada. Como en el caso de *CPNE*, en juegos con más de dos jugadores no puede garantizarse la existencia de un *CPCE*. Por ejemplo, el juego de la Figura 4.2 no tiene ningún *CPCE* (véase Moreno y Wooders[26], Apéndice A; este juego se debe a Einy y Peleg[13]). Este juego tampoco tiene ningún *CPNE*.

FIGURA 4.2

3,2,0	0,0,0
2,0,3	2,0,3

3,2,0	0,3,2
0,0,0	0,3,2

No obstante, Moreno y Wooders demuestran que en juegos resolubles por dominación, el único equilibrio de Nash del juego es un *CPCE*.

En el juego de coordinación de la Figura 1.1, la estrategia correlada consistente en jugar (T, L) con probabilidad 1 es el único *CPCE* del juego. En el dilema del prisionero de la Figura 1.2, la estrategia correlada consistente en jugar (D, D) con probabilidad 1 es el único *CPCE* del juego. Así pues, en estos juegos los conceptos *CPNE y CPCE* seleccionan las mismas estrategias. Sin embargo, en el juego de la Figura 4.1, para el que no existe ningún *CPNE*, la estrategia correlada μ^* es el único *CPCE* del juego. De hecho esta estrategia correlada es también un equilibrio correlado fuerte (*SCE*).

Conviene observar que no hay relación de inclusión alguna entre los conceptos de *CPCE y CPNE*. Aunque el concepto de *CPCE* introduce la posibilidad de comportamiento correlado entre los jugadores y, por tanto, amplía considerablemente el conjunto de acuerdos posibles, también amplía las posibilidades de desviación. Puesto que el concepto de desviación sostenible es recursivo, el «efecto neto» sobre el conjunto de desviaciones sostenibles para cada coalición es ambiguo.

4.3. Correlación limitada

Ray[31] considera situaciones en las que las posibilidades de correlación entre los jugadores están restringidas a aquellas que pueden implementarse mediante un *dispositivo aleatorio* exógenamente dado, y define el equilibrio correlado a prueba de coaliciones como un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones del *juego ampliado* por el dispositivo aleatorio.

Para establecer formalmente esta noción de equilibrio es preciso introducir los conceptos de dispositivo aleatorio y de juego ampliado. Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma normal. Un *dispositivo aleatorio d* es un par (M, p), donde $M = \Pi_{i=1}^{n} M_i$ es un *espacio de mensajes* y p es una distribución de probabilidad sobre M. *Un dispositivo aleatorio directo* es un dispositivo aleatorio tal que $M = A$ (obsérvese que, en este caso, cada mensaje $m_i \in M_i$ puede interpretarse como la estrategia que el dispositivo *recomienda* al jugador i).

Dado un juego G y un dispositivo aleatorio d, el *juego ampliado* G^d es la terna (N, Δ, u^d), donde $\Delta = \Pi_{i=1}^{n} \Delta_i$, con $\Delta_i = \{\delta_i \mid \delta_i : M_i \rightarrow A_i\}$, y para cada $i \in N$, y $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Delta$,

$$u_i^d(\delta) = \sum_{m \in M} p(m) u_i(\delta_1(m_1), \ldots, \delta_n(m_n)).$$

Una estrategia δ del juego ampliado G^d *induce* una estrategia correlada en el juego G, $\mu \in \Delta A$, dada por

$$\mu(a) = \sum_{m \in \delta^{-1}(a)} p(m)$$

Con estas definiciones podemos establecer el concepto de equilibrio correlado a prueba de coaliciones formulado por Ray[31]

Definición 4.6. *Una estrategia correlada μ es un equilibrio correlado a prueba de coaliciones ($CPCE_R$) del juego G si existe un dispositivo aleatorio d y un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones δ del juego ampliado G^d, tal que δ induce μ.*

Sea δ un equilibrio de Nash a prueba de coaliciones de un juego ampliado por un dispositivo aleatorio directo, y tal que para cada $i \in N$, δ_i es la identidad (i.e., consiste en obedecer la recomendación recibida). La estrategia correlada μ inducida por δ se denomina un *equilibrio correlado directo a prueba de coaliciones*. Ray demuestra que para juegos de dos jugadores, el conjunto de equilibrios correlado directo a prueba de coaliciones contiene al conjunto de equilibrios correlados no Pareto dominados por otros equilibrios correlados. Por tanto, los juegos de dos jugadores poseen un equilibrio correlado directo a prueba de coaliciones. Ray demuestra que todo *CPNE* es también un $CPCE_R$. Se desconoce, sin embargo, si un $CPCE_R$ existe para juegos de más de dos jugadores.

El concepto de equilibrio correlado a prueba de coaliciones propuesto por Ray está sujeto a críticas fundamentales. Por una parte, no parece razonable restringir las posibilidades de correlación a aquellas permitidas por un dispositivo aleatorio exógeno. Forges[18] ha demostrado que en juegos con más de cuatro jugadores y en los que los jugadores se comunican «con ruido», cualquier dispositivo aleatorio puede *emularse* mediante *pura conversación*. Así pues, pura conversación permitiría a los jugadores correlar sus acciones (y, en particular, sus desviaciones) más allá de las posibilidades limitadas que proporcionaría un único dispositivo aleatorio. Por otra parte, la noción de $CPCE_R$ no contempla la posibilidad de que una coalición desviante organice desviaciones condicionadas a los mensajes recibidos por todos los miembros de la coalición (en el juego ampliado sólo se consideran estrategias mixtas), y por tanto no está claro que un $CPCE_R$ sea «compatible en incentivos».

4.4. *Juegos con información incompleta*

En este apartado discutimos la extensión a juegos con información incompleta de los conceptos de equilibrio correlado fuerte y equilibrio correlado a prueba de coaliciones formulados por Moreno y Wooders. Para ello es preciso extender la noción de desviación factible introducida para juegos con información completa. Estas extensiones dan lugar a conceptos de equilibrio fuerte con comunicación y equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones [2]. Asimismo, se formula la noción de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones introducido por Einy y Peleg[13], y se discuten las relaciones entre estas nociones de equilibrio.

La posibilidad de desviaciones coalicionales condicionadas a las recomendaciones recibidas por los miembros de la coalición plantea problemas de incentivos derivados de la transmisión de información entre los miembros de la coalición desviante cuyo tratamiento requiere representar este tipo de situaciones como juegos bayesianos o juegos con información incompleta. En un juego bayesiano, los jugadores tienen incertidumbre acerca de las características de los demás jugadores. Para describir un juego bayesiano hay que especificar, además de los jugadores, acciones y funciones pagos, los conjuntos de características posibles de cada jugador y las *creencias* de cada jugador acerca de las características de los demás jugadores (representadas mediante una distribución de probabilidad sobre el conjunto de características posibles para todos los jugadores).

Así pues, un juego bayesiano Γ viene dado por (N, T, A, p, u), donde $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $T = \Pi_{i\in N} T_i$ es el conjunto de perfiles de características o tipos de jugadores posibles, $A = \Pi_{i\in N} A_i$ es el conjunto de perfiles de acciones posibles, $p = (p_i)_{i\in N}$ es el perfil de creencias de los jugadores, $p_i \in \Delta T$, y $u = (u_1, ..., u_n)$ es el vector de funciones de utilidad (u_i: $T \times A \rightarrow \Re$). Por simplicidad, supondremos que todos los conjuntos anteriormente mencionados son finitos.

Obsérvese que cuando los conjuntos T_i contienen un solo elemento, el juego Γ es un juego con información completa. Por tanto, cualquier noción de equilibrio formulada para juegos con información incompleta es también una noción de equilibrio para juegos con información completa. Así pues, las nociones de equilibrio que se formulan en esta sección son también de aplicación a juegos con información completa.

La siguiente notación será de utilidad. Dado un conjunto arbitrario $B = \Pi_{i\in N} B_i$ y una coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, definimos el conjunto $B_S = \Pi_{i\in S} B_i$, y $B_{-S} = \Pi_{i\in N\setminus S} B_i$; para cada $b \in B$ y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, escribimos $b = (b_S\, b_{-S})$, donde $b_S \in B_S$ y $b_{-S} \in B_{-S}$ (cuando $S = N$, establecemos la convención $b = (b_S, b_{-S}) = b_S$)

En un juego bayesiano Γ, una estrategia pura para el jugador i es una función $s_i : T_i \rightarrow A_i$, y una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Asimismo, una estrategia correlada es una función μ: $T_i \rightarrow \Delta A$. Obsérvese que *implementar* una estrategia correlada podría requerir que los jugadores revelen sus características, pues la distribución de probabilidad que la estrategia correlada prescribe para seleccionar el perfil de acciones pueden ser distintas para distintos perfiles de características. Sea $C(\Gamma)$ el conjunto de estrategias correladas del juego Γ. Dada una estrategia correlada μ, la utilidad esperada de un jugador cuyo tipo es t_i viene dada por

$$U_i(\mu| t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \sum_{a\in A} p_i(t_{-i}| t_i)\mu(a| t)u_i(a, t).$$

En un juego con información incompleta, una coalición S puede desviarse de una es-

[2] Un desarrollo análogo al seguido aquí, pero restringiendo el conjunto de *acuerdos y desviaciones* a sólo las estrategias mixtas, permitiría formular los conceptos de *equilibrio bayesiano fuerte* (Definición 4.9) y *equilibrio bayesiano a prueba de coaliciones* (Definición 4.11).

trategia correlada μ revelando características de sus miembros distintas de las verdaderas y tomando acciones distintas de las generadas por la estrategia μ. Una desviación requiere, pues, planear qué tipos van a revelar los miembros de la coalición dependiendo de sus verdaderos tipos, y qué acciones van a realizar los miembros de la coalición en función de los tipos revelados por los miembros de la coalición, los tipos verdaderos de los miembros de la coalición, y las recomendaciones o acciones generadas por la estrategia correlada de la que la coalición se desvía. Así pues, dada una estrategia correlada μ, el conjunto de desviaciones factibles de la coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, es el conjunto de estrategias correladas $\mu' \in C$ tal que para cada $(a,t) \in A \times T$ se cumple

$$\mu'(a|\, t) = \sum_{t_{-S} \in T_{-S}} \sum_{\alpha_S \in A_S} f_S(\tau_S |\, t_S)\mu(\alpha_S, a_{-S} |\, \tau_S, t_{-S})\eta_S(a_S |\, t_S, \tau_S, \alpha_S),$$

donde f_S: $T_S \to \Delta T_S$, indica los tipos que los miembros de la coalición revelan como función de sus verdaderos tipos, y $\eta_S : T_S \times T_S \times A_S \to \Delta A_S$ indica cómo se selecciona el perfil de acciones para la coalición dependiendo de los verdaderos tipos de los miembros de la coalición (t_S), los tipos revelados por los miembros de la coalición (τ_S), y las recomendaciones recibidas por los miembros de la coalición, α_S. Dada una estrategia correlada $\mu \in C(\Gamma)$ *y* una coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, denotaremos por $D(\mu, S)$ el *conjunto de desviaciones factibles de* μ *para la coalición S*. Esta noción de desviación factible permite obtener una extensión del concepto de equilibrio correlado para juegos con información incompleta[3].

Definición 4.7, *Una estrategia correlada* μ *es un equilibrio con comunicación (CE) si ningún jugador* $i \in N$ *tiene una desviación factible* $\mu' \in D(\mu, i)$ *tal que para alguno de sus tipos* $t_i \in T_i$, *se tiene* $U_i(\mu' |\, t_i) > U_i(\mu |\, t_i)$.

Asimismo, sobre la base de este concepto de desviación factible puede formularse una noción de *equilibrio fuerte con comunicación.* En un equilibrio fuerte con comunicación, ninguna coalición debe tener una desviación factible que sea *Pareto superior* para los miembros coalición. No es obvio, sin embargo, cuál es la noción de Pareto superioridad apropiada en este contexto. Una noción (débil) de Pareto superioridad requeriría que todos los miembros de la coalición mejoraran para alguno de sus tipos (pero no necesariamente para todos). Una noción alternativa (más fuerte) se obtendría si se requiriera que todos los miembros de la coalición mejorasen cualquiera que fuese su tipo. Estas nociones de Pareto superioridad se formalizan a continuación.

Definición 4.8. *Dados* $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, *y* μ, $\mu' \in C$, *se dice que* μ' *es débilmente Pareto superior a* μ *para la coalición S si*

(4.8.1) para todo $t_S \in T_S$, *y todo* $i \in S$: $U_i(\mu' |\, t_S) \geq U_i(\mu |\, t_S)$, *y*

(4.8.2) existe $\tilde{t}_S \in T_S$, *tal que para todo* $i \in S$: $U_i(\mu' |\, \tilde{t}_S) > U(\mu |\, t_S)$.

Asimismo, se dice que μ' *es fuertemente Pareto superior a* μ *para la coalición S si la desigualdad en (4.8.1) es estricta.*

---

[3] Esta noción de equilibrio con comunicación no es la única razonable; véase por ejemplo Forges[19].

La noción de Pareto superioridad se utiliza para determinar el conjunto de desviaciones frente a las que una estrategia de equilibrio ha de ser invulnerable. Cada noción de Pareto superioridad da lugar a un concepto de equilibrio fuerte con comunicación distinto. Si, por ejemplo, se utilizase la noción de Pareto superioridad fuerte, desviaciones en las que un individuo mejora para *casi todos* (pero no todos) sus tipos serían ignoradas. Así, si un jugador tiene una función de utilidad constante para alguno de sus tipos, entonces ninguna desviación en la que participase este individuo sería relevante, incluso si la probabilidad de que el individuo sea de ese tipo es muy pequeña. De hecho, una estrategia correlada invulnerable frente a desviaciones fuertemente Pareto superiores no es necesariamente un equilibrio con comunicación (de acuerdo con la Definición 4.7).

La noción de Pareto superioridad débil no tiene este inconveniente. Sin embargo, puede argüirse que la disponibilidad de un individuo a participar en una desviación que mejora sólo a algunos de sus tipos podría revelar información acerca de su verdadero tipo, lo que induciría a los participantes en dicha desviación a revisar sus creencias. Esto alteraría el juego de una manera fundamental. Este inconveniente se podría obviar si cada individuo anunciara su disponibilidad a participar en cualquier desviación que mejore al menos a uno de sus tipos. Este anuncio sería perfectamente creíble y haría que los participantes en una desviación no pudieran hacer inferencias acerca de las posibles características de los otros participantes. Moreno y Wooders introducen un concepto de equilibrio fuerte con comunicación formulado sobre la base de la noción de Pareto superioridad débil.

Definición 4.9. *(Moreno y Wooders[26]) Una estrategia correlada μ es un equilibrio fuerte con comunicación si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$ tiene una desviación factible $\mu' \in D(\mu, S)$ tal que μ' es débilmente Pareto superior a μ para S.*

Obviamente, todo equilibrio fuerte con comunicación es un equilibrio con comunicación (como ya se ha indicado, éste no sería el caso si la noción de Pareto superioridad débil se reemplaza por la de Pareto superioridad fuerte). Esta noción de equilibrio fuerte con comunicación es una extensión para juegos con información completa de la noción de equilibrio correlado fuerte, y conserva los mismos inconvenientes que ésta. En particular, no distingue aquellas desviaciones que son viables de las que no lo son.

El concepto de *desviación sostenible* introducido en la Definición 4.2 para juegos con información completa, puede utilizarse también aquí para diferenciar desviaciones viables de aquellas que no lo son. De nuevo el concepto de Pareto superioridad con que evaluamos las posibles desviaciones determina el conjunto de desviaciones sostenibles de una estrategia para una coalición. Moreno y Wooders introducen la noción de *desviación sostenible* basada en la noción de Pareto superioridad débil.

Definición 4.10. *Sea $\mu \in C$ y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, arbitrarios. El conjunto de desviaciones sostenibles de μ por la coalición S, $DS(\mu, S)$, viene dado por*

(i) $DS(\mu, S) = D(\mu, S)$, si $|S| = 1$, y

(ii) $DS(\mu, S) = \{\mu' \in D(\mu, S) | \nexists\, [R \in 2^S \backslash S, R \neq \emptyset, \mu'' \in DS(\mu', R)]$ tal que μ'' es débilmente Pareto superior para $S\}$, si $|S| > 1$.

Esta noción de desviación sostenible permite a M&W formular una noción de *equili-*

brio con comunicación y a prueba de coaliciones, que no es más que una extensión para juegos con información incompleta del concepto de equilibrio correlado a prueba de coaliciones.

Definición 4.11. *Moreno y Wooders[26]). Una estrategia correlada μ es un equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones si ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tiene una desviación sostenible $\mu' \in DS(\mu, S)$, tal que μ' es débilmente Pareto superior a μ para S.*

El conjunto de equilibrios con comunicación y a prueba de coaliciones de cualquier juego Γ está contenido en el conjunto de equilibrios con comunicación del juego, y contiene al conjunto de equilibrios fuertes con comunicación.

Una noción alternativa de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones ha sido propuesta por Einy y Peleg[13] (a los que nos referimos como E&P). E&P consideran la posibilidad de desviaciones de coaliciones sólo después de que los jugadores han recibido sus recomendaciones, y utilizan la noción de Pareto superioridad fuerte para determinar las desviaciones que mejoran a una coalición.

Supongamos que cada uno de los jugadores de un juego Γ recibe privadamente la recomendación de tomar una acción, que sabe ha sido seleccionada de acuerdo con la estrategia correlada μ. Cualquier coalición que considere desviarse de dichas recomendaciones se enfrenta a un *juego revisado* con información incompleta (independientemente de si Γ es un juego con información completa o incompleta), donde las características de cada uno de los miembros de la coalición incluyen las recomendaciones que con probabilidad positiva podría haber recibido de μ (además de las características de cada jugador, si se trata de un juego con información incompleta). Para describir este juego, introducimos la noción de *juego Bayesiano aumentado* (*JBA*).

Un JBA es un juego bayesiano al que se añade un grupo de *jugadores pasivos*, que no toman acción alguna, pero cuyas características determinan la utilidad de las demás participantes en el juego. Así pues, un JBA viene dado por $(N \cup M, T, A, p, u)$, donde N es el conjunto de *jugadores activos*, M es el conjunto de *jugadores pasivos*, $T = \Pi_{i\in N\cup M} T_i$, $A = \Pi_{i\in N} A_i$, $p = (p_i)_{i\in N}$, con $p_i: T_i \to \Delta T_{-i}$, y $u = (u_i)_{i\in N}$, con $u_i: T \times A \to \Re$. Cuando el conjunto M es vacío, un JBA es simplemente un juego bayesiano. Una estrategia correlada en un JBA es una función $\mu: T_N \to A$. Así pues, en un JBA los jugadores activos sólo pueden condicionar sus acciones en el perfil de tipos de jugadores activos.

Las nociones de equilibrio formuladas anteriormente tienen una extensión obvia para JBA; basta restringir las condiciones a las coaliciones que puedan formarse con jugadores pertenecientes a N.

Sea Γ un JBA arbitrario, sea μ una estrategia correlada, y sea S una coalición cualquiera. El *juego revisado* $\Gamma_{\mu,S}$ es el JBA $(S \cup N\backslash S, T \times A, A_S, \hat{p}, \hat{u})$, donde para cada $i \in S$

$$\hat{p}_i(t_{-i}, a_{-i} | t_i, a_i) = p_i(t_{-i} | t_i)\mu(a | t) \text{ y}$$
$$\hat{u}_i(\alpha_S, t, a) = u_i(\alpha_S, a_{N\backslash S}, t).$$

En un juego revisado $\Gamma_{\mu,S}$, los jugadores de la coalición complementaria $N\backslash S$ representan un papel *pasivo* (puesto que no participan en las discusiones o los acuerdos que los miembros de la coalición S puedan alcanzar), y su conducta se supone determinada por la estrategia μ. Para establecer la noción de E&P de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones necesitamos primero formular el concepto de *desviación internamente consistente*. Dado un JBA, Γ, representamos mediante $CE(\Gamma)$ al conjunto de equilibrios con comunicación de Γ.

Definición 4.12. *Sea Γ un JBA, y sean $\mu \in C(\Gamma)$, y $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, arbitrarios. El conjunto de desviaciones internamente consistentes de μ para la coalición S, $DIC(\mu, S)$, viene dado por*

(i) si $|S| = 1$, entonces $DIC(\mu,S) = \{\eta \in C(\Gamma_{\mu,S}) \mid \mu \in CE(\Gamma_{\mu,S})\}$,

(ii) si $|S| > 1$, entonces $DIC(\mu,S) = \{\eta \in C(\Gamma_{\mu,S}) \mid (1)\ \eta \in CE(\Gamma_{\mu,S})$, y (2) $\nexists R \in S, R \neq \emptyset$, y $\eta' \in C((\Gamma_{\mu,S})_{\eta,S\setminus R})$, tal que $\eta' \in DIS(\mu, R)$ y η' es Pareto superior a η para la coalición $R\}$.

Con esta noción de consistencia interna podemos formular el concepto de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones introducido por E&P.

Definición 4.13. *(Einy y Peleg[13]) Sea Γ un JBA. Una estrategia correlada μ es un equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones de Γ, si μ (1) $\mu \in CE(\Gamma)$ y (2) no existe ninguna coalición $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$ que que tenga una desviación internamente consistente, $\eta \in DIC(\Gamma_{\mu,S})$, tal que η es Pareto superior a μ para la coalición S.*

Las dos nociones de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones discutidas en este apartado están sujetas a críticas. La noción formulada por Moreno y Wooders no es apropiada en la situación más común en la que las posibles coaliciones desviantes se enfrentan al problema de transmisión de información que se plantea si los jugadores tienen que revelar la acción que le fue recomendada por la estrategia correlada de la que la coalición se desvía. Para evitar este problema, M&W suponen que las coaliciones se desvían estableciendo un nuevo mediador, que se encarga de recibir las recomendaciones del mediador encargado de implementar el acuerdo original; este mediador selecciona un nuevo perfil de acciones para los miembros de la coalición que comunica a cada jugador privadamente. Este esquema, aún no siendo el más natural, no está sujeto a los intentos de manipulación que cabría esperar si los jugadores de una coalición desviante tuvieran que comunicar al nuevo mediador la recomendación recibida.

Por el contrario, Einy y Peleg enfatizan el hecho de que los jugadores de una coalición desviante se enfrentan a un problema de transmisión de información. Su formalización de equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones ignora, sin embargo, la posibilidad de que una coalición (consistente en más de un jugador) planee desviaciones en las que los jugadores de la coalición revelan tipos distintos a su verdaderos tipos. La existencia de este tipo de desviaciones plantea problemas de compatibilidad con incentivos que esta noción de equilibrio no resuelve (para una discusión más extensa de este problema véase Moreno y Wooders[26]).

5. Cooperación y renegociación

En esta sección se discuten nociones de equilibrio que recogen las ideas de renegociación y de posibilidad de desviaciones coalicionales en juegos en forma extensiva. Un juego en forma extensiva se caracteriza porque los jugadores deciden sus acciones a lo largo de varias etapas y, a medida que transcurre el juego según las estrategias de los jugadores, se revela completa o parcialmente a cada jugador las acciones tomadas hasta ese momento por el resto de los jugadores, así como el resultado de los movimientos aleatorios o de la naturaleza que incluya el juego. Así pues, un juego en forma extensiva especifica (1) qué jugador decide en cada eventualidad o nudo de decisión, (2) qué información tiene un jugador cada vez que tiene que decidir, (3) qué acciones puede tomar un jugador cada vez que tiene que decidir, (4) qué distribuciones de probabilidad generan los movimientos aleatorios del juego, y (5) cuáles son los posibles resultados (pagos) del juego (una definición formal de juego en forma extensiva puede encontrarse en cualquier manual de Teoría de Juegos).

Los juegos repetidos y multietapa con horizonte finito son un caso particular de juegos en forma extensiva. En estos juegos, al principio de cada etapa ningún jugador conoce la acción tomada por los demás jugadores en esa etapa, pero sí se conocen las acciones tomadas en las etapas anteriores.

En un juego en forma extensiva, una estrategia pura para un jugador asigna una acción a cada eventualidad en la que el jugador tiene que decidir. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias puras. Un perfil de estrategias inducirá una distribución sobre los resultados posibles del juego, por lo que podremos asignar a cada jugador la utilidad esperada de seguir ese perfil de estrategias. Por tanto, a cada juego en forma extensiva le podemos asociar un juego en forma normal definiendo de manera adecuada los conjuntos de estrategias y las funciones de utilidad. Esto nos permite aplicar las definiciones establecidas para juegos en forma normal a juegos en forma extensiva.

En ocasiones, un juego en forma extensiva puede descomponerse en varios «subjuegos» cada uno de los cuales constituye un juego en sí mismo. Un subjuego propio es cualquier subjuego distinto del juego original. El número de etapas de un juego en forma extensiva es el número máximo de subjuegos que se pueden encontrar en el camino desde el comienzo del juego hasta un «vértice» final. Una etapa, por tanto, es el juego entre dos subjuegos consecutivos. De esta manera podemos aplicar a juegos en forma extensiva las definiciones referentes a las historias dadas para juegos repetidos.

Una noción de equilibrio apropiada para juegos en forma extensiva con comunicación debe tener en cuenta los aspectos dinámicos (implícitos en el concepto de renegociación) y de formación de coaliciones que se han tratado de manera separada en las Secciones 3 y 4. Existen dos definiciones que tienen en cuenta ambos aspectos: La primera es una extensión del concepto de equilibrio de Nash a prueba de coaliciones (*CPNE*), introducido también por Berheim, Peleg y Whinston. La motivación de este nuevo concepto se puede entender en el mismo contexto que se propuso como explicación de *CPNE,* donde un grupo de jugadores llegan a un acuerdo y deben abandonar uno a uno la sala de manera aleatoria. El *CPNE* debía sobrevivir a posibles desviaciones del grupo todavía presente en la sala tras cualquier posible orden en la salida. Un acuerdo que sea un *equilibrio de Nash perfectamente a prueba de coaliciones* (*PCPNE*) debe sobrevivir este procedimiento cuando se añade la posibilidad de que, a medida que los jugadores abandonan la sala (dejando autómatas que jueguen en el futuro el resto de la estrategia según el acuerdo), el tiempo transcurre y se van alcanzando las siguientes etapas del juego.

Siguiendo la notación utilizada en las secciones anteriores, denotemos por N el conjunto de jugadores y por A el conjunto de perfiles estrategias de los jugadores. Por $\Gamma \mid a_{-S}$ denotaremos el juego al que se enfrenta la coalición S cuando el resto de jugadores ($N \backslash S$) emplea el vector de estrategias a_{-S}.

Definición 5.1. *(BP&W). Sea Γ un juego en forma extensiva con n jugadores y t etapas.*

(i) Si $(n, t) = (1,1)$, $a^* \in A$ es un equilibrio de Nash perfectamente a prueba de coaliciones (PCPNE) si a^* maximiza la utilidad del jugador.

(ii) Sea $(n,t) \neq (1,1)$, y supóngase que se ha definido la noción de PCPNE para juegos con m jugadores y s etapas, donde $(m, s) \leq (n, t)$ y $(m, s) \neq (n, t)$.

(a) $s^* \in S$ es perfectamente sostenible si (a.1) para todo $S \subset N$, a^*_{-S} es un PCPNE en el juego $\Gamma \mid a^*_{-S}$, y (a.2) para cualquier subjuego propio g de Γ, $a^*(g)$ es un PCPNE en g.

(b) Para cada juego Γ con n jugadores y t etapas, $a^* \in A$ es un PCPNE si es perfectamente sostenible, y si no existe otro vector de estrategias perfectamente sostenible $a \in A$, tal que $u^i(a) > u^i(a^*)$ para todo $i \in N$.

El problema con esta definición es que, en su condición (ii) (a.1) se consideran fijas las estrategias de la coalición complementaria en todo el juego. Si bien éste es un requerimiento plausible cuando las acciones se eligen simultáneamente, no lo es en el caso de juegos en forma extensiva, donde a medida que transcurre el juego algunas acciones pasadas son conocidas por los jugadores. En este tipo de juegos no se puede rechazar la posibilidad una reacción ante un desviación observada por alguno de los jugadores de la coalición complementaria. Ferreira[17] introduce la noción de *equilibrio a prueba de comunicación* que tiene en cuenta este aspecto de consistencia temporal. En el contexto utilizado para motivar la noción de *CPNE y PCPNE,* esta nueva definición considera la posibilidad de que los jugadores puedan volver a ocupar la sala al comienzo de cada nueva etapa, y reaccionar frente a cualquier desviación observada en etapas anteriores.

La formalización de esta noción de equilibrio requiere la introducción de la siguiente notación. Dado un subconjunto de estrategias $B \subset A$, el conjunto de equilibrios a prueba de coaliciones restringido a B (*CPNE*(B)) se define de manera análoga a *CPNE;* basta substituir el conjunto $\Pi_{i \in N} \Delta A_i$ al que deben pertenecer todas las estrategias (y desviaciones) en la Definición 4.3b, por el conjunto B.

Definición 5.2. *Sea Γ un juego en forma extensiva con t etapas.*

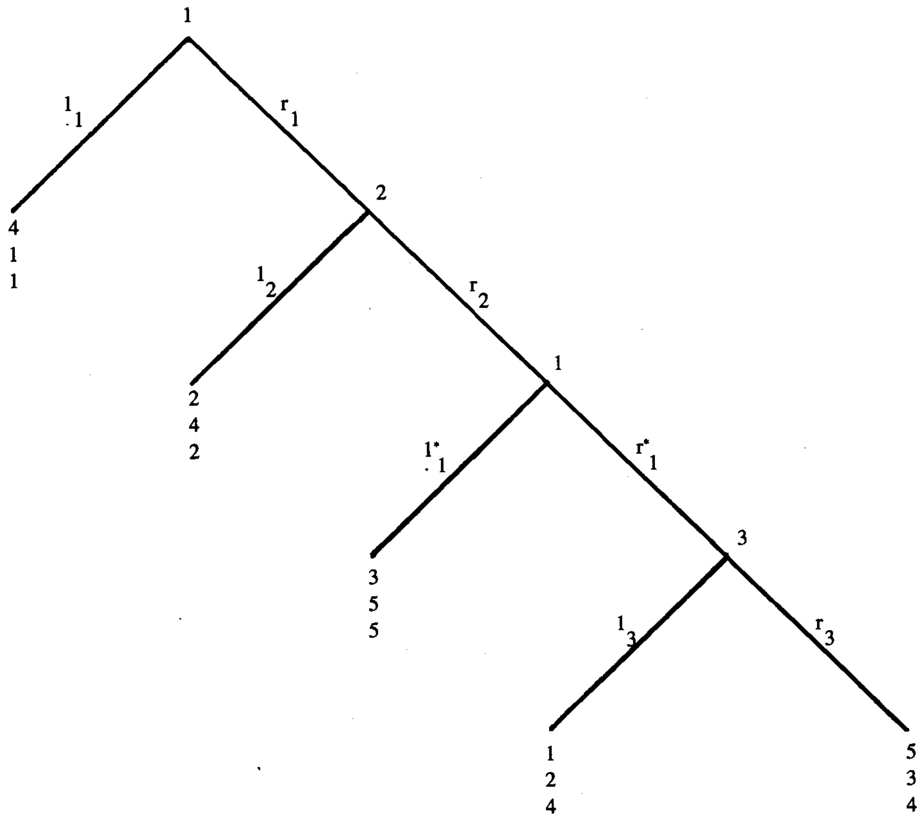
(i) Si $t = 1$, a^* es un equilibrio a prueba de comunicación (Com-PE) si es un CPNE.

(ii) Sea $t > 1$ y supóngase que Com-PE ha sido definido para juegos con $r < t$ etapas. Entonces a^* es Com-PE si es un CPNE($\tilde{A}$), donde

$$\tilde{A} = \{a \in \Pi_{i \in N} \Delta A_i : a \text{ induce un Com-PE en subjuegos propios de } \Gamma\} .$$

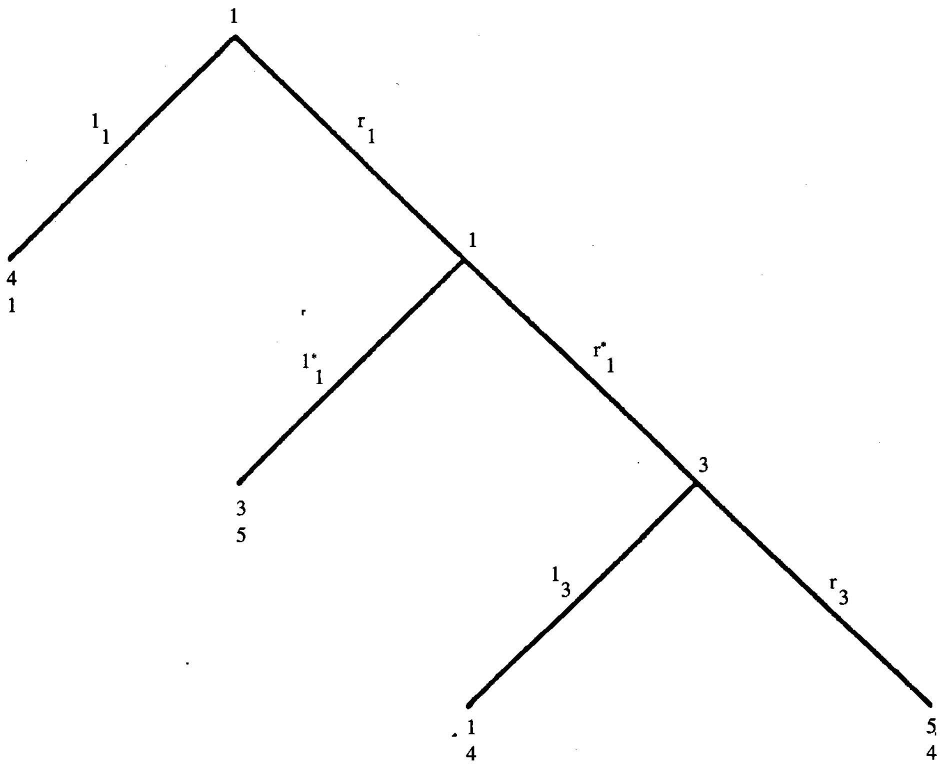
La diferencia entre las dos definiciones puede apreciarse en el ejemplo de la Figura 5.1. (debido a Peleg[30]).

FIGURA 5.1



Es inmediato comprobar que $a = (l_1, r_2, l_1^*, l_3)$ y $a' = (l_1, l_2, r_1^*, r_3)$ son los únicos equilibrios (en estrategias puras) perfectos en subjuegos. Si a' es propuesto, los tres jugadores tienen incentivos para renegociar a la estrategia dictada por a en el subjuego en que el jugador 2 mueve. No es posible encontrar una desviación similar por la coalición de todos los jugadores en a. Este proceso de renegociación aísla a a como el único equilibrio Pareto perfecto. El juego no posee ningún *PCPNE:* el perfil a' no puede serlo por el argumento anterior y porque (r_2, l_1^*, l_3) es un *PCPNE* en el juego inducido por r_1. Para mostrar que a no es un *PCPNE,* considérese el juego inducido por r_2 (Figura 5.2). La coalición formada por los jugadores 1 y 3 renegociará desde (l_1, l_1^*, l_3) la estrategia inducida por a en el juego inducido en esta coalición tras fijar la estrategia del jugador 2, hacia (r_1, r_1^*, r_3). Este último vector es un *PCPNE* en el juego inducido y, por tanto, a no es un *PCPNE* del juego.

FIGURA 5.2



El perfil a sí es en cambio un *Com-PE:* si ocurre la desviación de los jugadores 1 y 2 arriba descrita, tras r_1, el jugador 2 la observará. Una renegociación del acuerdo en este punto necesita que, a partir de este momento, continúe un equilibrio. El perfil (r_2, l^*_1, l_3) es el único posible; pero entonces el jugador 1, que al anticipar esta manera de jugar se ve perjudicado con respecto a la estrategia original, nunca habría dado su conformidad a la desviación propuesta. La estrategia a es un *Com-PE.*

Ambas definiciones coinciden con *PPE* en juegos de dos jugadores. Sin embargo, excepto para el caso de 2 etapas, en el que *PCPNE* $\subset$ *Com-PE,* no se da ninguna relación de inclusión. La existencia es, como siempre en equilibrios coalicionales, problemática. No obstante, *Com-PE* existe en juegos de información perfecta; el ejemplo anterior muestra que éste no es el caso para *PCPNE.*

Las definiciones de *PCPNE y Com-PE* han sido extendidas al caso de infinitos jugadores e infinitos períodos por Asheim[3] y Ferreira[16], respectivamente, usando la metodología de los conjuntos estables. La ventaja de estas nuevas definiciones es doble. Por una parte ofrecen una versión unificada en el tratamiento de juegos finitos e infinitos y, por otra, las relaciones de dominación muestran las pautas de comportamiento de cada coalición en cada período de un modo más claro que la definición recursiva del caso finito; de esta manera la comparación entre las diferentes definiciones es más clara.

Para ambos conceptos definiremos el mismo conjunto abstracto

$$D^* = \{(S, g^h, \sigma) \mid S \subset N, S \neq \emptyset, h \in H, \sigma \in SPE(g^h)\},$$

donde la primera componente es una coalición S de jugadores y las otras dos componentes son una historia h, y un equilibrio perfecto en el subjuego g^h, respectivamente. A continuación presentamos las relaciones de dominación.

La relación de dominación asociada con *PCPNE*, $\prec^P$, se define a continuación. Dados (S, g^k, μ) y $(R, g^h, \sigma) \in D^*$, escribimos

$$(S, g^k, \mu) \prec^P (R, g^h, \sigma) \quad \text{si y sólo si}$$
$$h \in H^k, R \subset S, \sigma_{-s} = \mu_{-s} \quad \text{y} \quad u_i^k(\mu) < u_i^k(\sigma) \quad \text{para todo } i \in R.$$

Asimismo, dados (S, g^k, μ), $(R, g^h, \sigma) \in D^*$, definimos la relación de dominación asociada con Com-PE, $\prec^C$, por

$$(S, g^k, \mu) \prec^C (R, g^h, \sigma) \quad \text{si y sólo si}$$
$$u_i^k(\mu) < u_i^h(\sigma) \quad \text{para todo } i \in R, \sigma_{-s} = \mu_{-s},$$
$$\text{y bien} \quad h \in H^k \quad \text{y } h \neq k, \quad \text{o bien } h = k, \quad \text{y} \quad R \subset S.$$

Las nociones de *PCPNE y Com-PE* pueden extenderse para juegos infinitos sin más que sustituir el conjunto abstracto y la relación de dominación de la Definición 3.4 por los asociados con las nociones de *PCPNE y Com-PE*, respectivamente. Obsérvese que ambas relaciones de dominación se reducen a la asociada con *PPE* en la Definición 3.4 para el caso de dos jugadores, y que para juegos en forma normal (por tanto con historia nula) coincidirían con *CPNE*.

6. Conclusiones

Como el lector habrá podido concluir, hasta ahora no se ha encontrado una noción de equilibrio que implícitamente incorpore las oportunidades de cooperación propiciadas por la posibilidad de comunicación entre los jugadores, y que tenga validez general en juegos no cooperativos. Cada una de las nociones de equilibrio propuestas está sujeta a críticas importantes que plantean dudas sobre su validez general.

En el problema de la renegociación discutido en la Sección 3, la noción de equilibrio Pareto perfecto resulta satisfactoria para juegos repetidos con horizonte finito y con dos jugadores. Para juegos con horizonte infinito, se han propuesto varias nociones de equilibrio que difieren en el criterio utilizado para distinguir entre las estrategias que son creíbles y las que no lo son. Aunque la noción de credibilidad responde a la idea básica de que un jugador seguirá una determinada estrategia si cualquier desviación induce un resultado peor al que obtendría si siguiera la estrategia prescrita[4], su formulación concreta está sujeta a con-

[4] La credibilidad de una estrategia, por tanto, se debe a la credibilidad de la estrategia alternativa.

troversia. En juegos con más de dos jugadores, al problema de la renegociación se añade el de la posibilidad de desviaciones por coaliciones intermedias.

Las definiciones de equilibrio a prueba de coaliciones para juegos estáticos están sujetas a una controversia similar. Todas las definiciones discutidas en la Sección 4, excepto las nociones de equilibrio fuerte (*SNE, SCE,* equilibrio fuerte con comunicación), utilizan el criterio de *sostenibilidad* para distinguir las desviaciones que son viables de las que no lo son. Este criterio sólo tiene en cuenta posibles desviaciones posteriores de subcoaliciones de la coalición desviante. Se ha señalado, sin embargo, que algunas desviaciones podrían no ser viables si existen incentivos para organizar desviaciones por coaliciones compuestas por algunos miembros de la coalición desviante y otros de la coalición complementaria. Admitir esta posibilidad rompería la «recursividad» de la noción de desviación sostenible, y alteraría la noción de equilibrio de manera fundamental.

Este problema ha sido estudiado por Greenberg[20], que propone la de *equilibrio de amenazas coalicionales contingentes* (*CCTE*), y por Chakravorti y Kahn[10], quienes formulan la noción de *equilibrio universal a prueba de coaliciones* (*UCPE*). Ambas definiciones se aplican a juegos en forma normal y se diferencian de *CPNE* fundamentalmente en que las desviaciones son inmunes a desviaciones consistentes, no sólo por parte de subcoaliciones, sino de cualquier otra coalición. La primordial diferencia entre ellos es que, mientras en *CCTE* las desviaciones son públicamente observables, en *UCPE* no lo son. Ambas definiciones se formulan utilizando la metodología de los conjuntos estables. Los criterios de consistencia recogidos en la relación de dominación no son, sin embargo, los únicos posibles. Existen otros criterios de consistencia aparentemente razonables que conducirían a nociones de equilibrio distintas. Chwe[11] estudia un criterio de consistencia distinto, en el que las coaliciones evalúan las consecuencias «futuras» de sus desviaciones. Este enfoque requiere introducir una dinámica concreta, que determine la situación generada por una desviación. Las nociones de equilibrio propuestas por Greenberg, Chakravorti y Kahn, y Chwe no tienen en cuenta la posibilidad de que los jugadores de un juego estático utilicen estrategias correladas.

Como ya se indicó en la Sección 4, esta posibilidad no debe ignorarse si los jugadores pueden comunicarse, pues en este caso ciertamente pueden utilizar estrategias correladas. Las nociones de equilibrio correlado y equilibrio con comunicación y a prueba de coaliciones formulados en la Sección 4 incorporan esta posibilidad, pero no resuelven de manera completamente satisfactoria los problemas de incentivos que introduce esta «conducta correlada».

Las dos extensiones de equilibrios coalicionales a juegos dinámicos (o de renegociación al caso de más de dos jugadores) son de aplicación más general que el marco de los juegos repetidos. Ambas parten del concepto de *CPNE,* por lo que usan la noción de sostenibilidad y no tienen en cuenta la posibilidad de desviaciones correladas. Sin embargo constituyen el primer acercamiento para una unificación de los problemas derivados de la renegociación y de la desviación coalicional. Entre ellas, la noción de equilibrio a prueba de comunicación propuesta por Ferreira tiene la ventaja de que su definición podría reformularse de manera automática si un nuevo concepto de equilibrio para juegos estáticos alternativo a *CPNE* se toma como punto de partida.

Referencias bibliográficas

[1] ABREU, D. (1988). «On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting», *Econometrica,* 56, pp. 383-396.

[2] ABREU, D., y PEARCE, D. (1988). «A Perspective on Renegotiation in Repeated Games», Working Paper in Economics E-89-31, Stanford, The Hoover Institution.

[3] ASHEIM, G. (1991). «Extending Renegotiation-Proofness to Infinite Horizon Games», *Games and Economic Behavior,* 3, pp. 278-294.

[4] ASILIS, C.; KAHN, C., y MOOKHERJEE, D. (1991). «A Unified Approach to -Proof Equilibria», mimeo.

[5] AUMANN, R. (1959). Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games», en *Contributions to the Theory of Games IV,* Princeton, N.J., Princeton Univ. Press.

[6] AUMANN, R. (1974). «Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies», *Journal of Mathematical Economics,* 1, pp. 67-96.

[7] BERGIN, J., y MCLEOD, W. B. (1989). «Efficiency and Renegotiation in Repeated Games», mimeo, Queen's University.

[8] BERNHEIM, B.; PELEG, B., y Whinston, M. (1987). «Coalition-proof Nash Equilibria I: Concepts», *Journal of Economic Theory,* 42, pp. 1-12.

[9] BERNHEIM, B., y RAY, D. (1989). «Collective Dynamic Consistency in Repeated Games», *Games and Economic Behavior,* 1, pp. 295-326.

[10] CHAKRAVORTI, B., y KAHN, C. (1993). «Universal Coalition-proof Equilibrium: Concepts and Applications», *Bellcore Economics Discussion Paper* N.º 98.

[11] CHWE, M. (1994). «Farsighted Coalitional Stability», *Journal of Economic Theory.*

[12] VAN DAMME, E. (1989). «Renegotiation-proof Equilibria in Repeated Prisoners' Dilemma», *Journal of Economic Theory,* 47, pp. 206-217.

[13] EINY, E., y PELEG, B. (1992). «Coalition-proof Communication Equilibria». Hebrew University of Jerusalem discussion paper N.º 9.

[14] FARRELL, J. (1987). «Cheap Talk, Coordination, and Entry», *Rand Journal of Economics,* 18, pp. 34-39.

[15] FARRELL, J., y MASKIN, E. (1989). «Renegotiation in Repeated Games», *Games and Economic Behavior,* 1, pp. 327-360.

[16] FERREIRA, J. L. (1990). «A Communication-proof Equilibrium Concept», Discussion Paper N.º 896, CMSEMS, Northwestern University.

[17] FERREIRA, J. L. (1995). «A Communication-proof Equilibrium Concept», *Journal of Economic Theory,* en prensa.

[18] FORGES, F. (1986). «An Approach to Communication Equilibrium», *Econometrica,* 54, pp. 1375-1286.

[19] FORGES, F. (1993). «Five Legitimate Definitions of Correlated Equilibrium in Games of Incomplete Information,» *Journal of Economic Theory.*

[20] GREENBERG, J. (1989). «Deriving Strong and Coalition-proof Nash Equilibria from an Abstract System», *Journal of Economic Theory,* 49, pp. 195-202.

[21] GREENBERG, J. (1990). *The Theory of Social Situations: An Alternative Game- Theoretic Approach,* Cambridge, Cambridge University Press.

[22] HOLMSTROM, B., y MYERSON, R. (1983). «Efficient and durable decision rules with incomplete information», *Econometrica,* 53, pp. 1799-1819.

[23] KAHN, C., y MOOKHERJEE, D. (1989). «The Good, the Bad and the Ugly: Coalition-proof Equilibrium in Games with Infinite Satrategy Spaces», mimeo.

[24] LUCE, R., y Raiffa, D. (1957). *Games and Decisions,* New York, J. Wiley and Sons,.

[25] MOULIN, H. (1981). *Game Theory for the Social Sciences,* Studies in Game Theory and Mathematical Economics, New York, N.Y. University Press.

[26] MORENO, D., y WOODERS, J. (1993). «Coalition-proof Equilibrium», University of Arizona working paper.

[27] MYERSON, R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict,* Cambridge, Massachusetts, Harvard Univ. Press.

[28] VON NEUMANN, J., y MORGENSTERN, O. (1947). *The Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton, Princeton University Press.

[29] PEARCE, D. G. (1987). «Renegotiation-proof Equilibria: Collective Rationality and Intertemporal Cooperation», mimeo, Yale University.

[30] PELEG, B. (1988). «On Perfectly Coalition-proof Nash Equilibria», mimeo, Department of Mathematics, The Hebrew University.

[31] RAY, I. (1993). «Coalition-proof Correlated Equilibrium: A Definition», CORE Discussion paper #9353.

TABLA DE ABREVIATURAS

CE *(communication equilibrium):* equilibrio con comunicación (Definición 4.9)
Com-PE *(communication-proof equilibrium):* equilibrio a prueba de comunicación (Definición 5.2)
CPCE *(coalition-proof correlated equilibrium):* equilibrio correlado a prueba de coaliciones (Definición 4.5)
CPCE$_R$ *(coalition-proof correlated equilibrium, Ray's definition)*: equilibrio correlado a prueba de coaliciones, definición de Ray (Definición 4.6)
CPNE *(coalition-proof Nash equilibrium)*: equilibrio de Nash a prueba de coaliciones (definiciones 4.3 y 4.3b)
PCPNE (perfectly coalition-proof Nash equilibrium): equilibrio de Nash perfectamente a prueba de coalicciones (Definición 5.1)
PPE *(Pareto perfect equilibrium)*: equilibrio Pareto perfecto (definiciones 3.1 y 3.4)
RSRP *(relative strongly renegotiation proof)*: fuertemente a prueba de renegociación relativo
SCE *(strong correlated equilibrium):* equilibrio correlado fuerte (Definición 4.4)
SNE *(strong Nash equilibrium):* equilibrio fuerte de Nash (Definición 4.1)
SPE *(subgame perfect equilibrium):* equilibrio perfecto en subjuegos
SRP *(strongly renegotiation proof):* fuertemente a prueba de renegociación
WRP *(weakly renegotiation proof):* débilmente a prueba de renegociación (Definición 3.2).